

HVAD VI VED OM UNDER- SØGELSESORIENTERET UNDERVISNING I MATEMATIK

Jonas Dreyøe, Claus Michelsen, Mette Dreier Hjelmberg, Dorte Moeskær Larsen, Bent Kofod Lindhardt og Morten Misfeldt

INDHOLDSFORTEGNELSE

1.	INDLEDNING	3
2.	CENTRALE FUND	4
3.	PRAKSISKORTLÆGNING	5
4.	DEN DANSKE KOMPETENCEDISKURS I MATEMATIK	10
5.	FORSKNINGSKORTLÆGNING	13
6.	DESIGNPRINCIPPER FOR INTERVENTIONEN	25
7.	KONKLUSION.....	27
	LITTERATURLISTE.....	29

1. INDLEDNING

I denne delrapport præsenteres forundersøgelsen til matematikdelen af et større forsknings- og udviklingsprojekt med titlen *Bedre kvalitet i dansk og matematik: Et flerstrengt interventionsprogram med fokus på undersøgelsesorienteret dansk- og matematikundervisning* (forkortet KiDM), der er finansieret af Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling. Ud over nærværende rapport består forundersøgelsen af en almindidaktisk kortlægning og en danskdidaktisk kortlægning. Denne del af rapporten har et matematikdidaktisk udgangspunkt med det formål at kvalificere projektets interventioner i matematik. Dette gøres ved at fremskrive centrale tematikker omkring temaet *undersøgende matematikundervisning* i international matematikdidaktisk forskning og i dansk praksis. Undersøgelsen falder i to dele - en praksiskortlægning og en forskningskortlægning.

Praksiskortlægningen beskriver de eksisterende forståelser af undersøgende matematikundervisning i den danske folkeskole samt de problemer og muligheder, der findes i den forbindelse.

Forskningskortlægningen beskriver de centrale temaer i den matematikdidaktiske forskning i undersøgende matematikundervisning.

Fokusgruppeinterviews med matematikvejledere er valgt som bærende metode til praksiskortlægningen. Dette valg er begrundet i et ønske om, at projektets interventioner og resultater skal være i overensstemmelse med matematiklæreres forståelse af deres arbejdssituation. Vi betragter matematikvejledere som stærke kilder til at få adgang til at forstå matematiklæreres situation.

Forskningskortlægningen gennemføres som en systematisk syntese af den væsentligste aktuelle matematikdidaktiske forskningslitteratur. Der er gennemført søgning af centrale temaer relateret til undersøgende undervisning i matematik i internationalt anerkendte matematikdidaktiske tidsskrifter uden et særligt fokus på bestemte metodiske tilgange. Dette valg begrundes i et ønske om at supplere den af Rambøll Management Consulting og Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning producerede rapport "Forskningskortlægning Matematik (Mathematical Literacy)" fra 2014. Denne rapport fokuserer på evidensbaserede studier, og som konsekvens heraf adresserer den meget få studier fra internationalt anerkendte matematikdidaktiske tidsskrifter.

Ud over at afrapportere praksiskortlægningen og forskningskortlægningen beskriver rapporten også de centrale principper i interventionsdesignet i matematikdelen af projektet KiDM. Disse principper relateres til og begrundes i kortlægningernes resultater. På denne måde har kortlægningen også det formål, at de centrale designvalg i interventionen begrundes i viden om dansk praksis i matematikundervisning og international forskning i undersøgende matematikundervisning.

Rapporten er opbygget som et resume af de centrale fund i praksis- og forskningskortlægningen, hvorefter resultaterne af praksiskortlægningen og forskningskortlægningen samt interventionens centrale principper præsenteres. Endelig vedlægges diverse bilag i form af keywords, forandringsteori, arbejdsdokument for interventionsdesign, interviewguide til fokusgruppeinterviews og forskningskortlægningens genbeskrivelse af artikler.

2. CENTRALE FUND

De centrale fund i praksiskortlægningen peger på, at der blandt matematiklærerne i den danske folkeskole er divergerende opfattelser af undersøgende undervisning. Nogle lærere fokuserer meget på ydre krav, mens andre fokuserer på begrebsforståelse, dybdelæring, mening og motivation. Både lærerkompetence-niveau og de mange eksterne krav har betydning for mulighederne for at gennemføre undersøgende matematikundervisning. Det er tydeligt, at der er elevgrupper, som er udfordrede af undersøgende arbejdsformer. Kortlægningen peger desuden på nogle fordelagtige muligheder i undersøgende aktiviteter i forhold til at udvikle elevernes matematiske dannelse, deres måde at se verden på og deres evne til at skabe mening i matematiske aktiviteter og situationer. Der er desuden didaktiske potentialer i den undersøgende tilgang, forstået på den måde at undersøgelsesbaserede og anvendelsesorienterede tilgange fremmer den dialogiske undervisning og understøtter lærer/elev-interaktionen. Endelig viser kortlægningen, at fagteamsamarbejde og faglige fyrtårne i form af matematikvejledere er særdeles vigtige elementer i forbindelse med italesættelse og udbredelse af undersøgende og anvendelsesorienteret matematikundervisning i den danske folkeskole.

Forskningskortlægningen viser, at den *kommunikative struktur* i klasseværelset har stor betydning for mulighederne for gennemførelsen af undersøgende matematikundervisning. En klassekultur, der tillader forskellige tilgange og fejl, er central, hvilket betyder, at læreren ofte skal afgive en del kontrol til eleverne for at få dette til at lykkes. Der er ikke et tydeligt svar på, hvilke *matematiske kompetencer* og hvilke elementer af *matematisk kunnen*, der er centrale, når man arbejder undersøgende. Den internationale forskningslitteratur peger dog på, at spørgsmål angående problemløsning, problemformulering, kreativitet og matematisk modellering ofte er i spil, når der arbejdes undersøgende. Det bør dog understreges, at matematisk indholdsviden er afgørende for undersøgende arbejde, og at fraværet af denne viden kan blokere for mulighederne i det undersøgende arbejde.

Den viden, som eleverne bringer ind i matematikundervisningen, er central. Det viser sig både som forhold, der vedrører matematisk problemløsnings- og modelleringskompetence og i form af en anerkendelse af, at matematisk forhåndsviden er vigtig. Derudover er de åbne undersøgelser i forbindelse med matematikundervisningen kendetegnet ved, at de *udvikler bredere kognitive og emotionelle kompetencer*, som eksempelvis fleksibel tænkning og engagement. Endelig peger en del af forskningslitteraturen på, at deltagelse i matematiske undersøgelser understøtter demokratisk dannelse og forbereder eleverne til at håndtere situationer uden for skolen.

Forskningslitteraturen peger på en række *konkrete håndtag*, som kan bringes i spil i forhold til at understøtte undersøgende undervisning. Det drejer sig både om didaktiske (fx struktureret opsamling på åbne aktiviteter), ressourceorienterede (fx opgavebanker og gode spørgsmål) og teknologiske (fx matematiske værktøjer) håndtag. Elev- og aktivitetsorienteret undervisning bidrager i høj grad til undersøgende undervisning. I modsætning hertil vil en lærerorienteret undervisning ofte gøre det vanskeligt at gennemføre en succesfuld undersøgende undervisning.

Endelig understreger forskningskortlægningen det vanskelige og vigtige i at understøtte *lærersamarbejde og udvikling af lærerkompetencer* i forhold til undersøgende undervisning. Dette omhandler forholdet mellem det konkrete repertoire inden for undersøgende undervisning, som en lærer kan udvikle og den bredere viden om matematik og matematikdidaktik, som han/hun besidder samt om de samarbejdsstrukturer og konstellationer, som læreren har mulighed for at indgå i.

3. PRAKSISKORTLÆGNING

Praksiskortlægningen skal sikre, at projektet bygger på en klar forståelse af den aktuelle danske situation og herunder praktiske og didaktiske udfordringer i forhold til undersøgende og anvendelsesorienteret matematikundervisning. Mange folkeskoler har ansat en matematikvejleder til at varetage rådgivende og koordinerende funktioner i forbindelse med skolens matematikundervisning. Matematikvejledere er således væsentlige kilder til afdækning af den aktuelle situation i dansk matematikundervisning - herunder identifikation af best practice. Praksiskortlægningen er derfor baseret på fokusgruppeinterviews med matematikvejledere. Der er gennemført tre fokusgruppeinterviews - et på Sjælland, et i Nordjylland og et på Fyn. I hvert interview deltager to erfarne matematikvejledere.

Fokusgruppeinterviewene har taget udgangspunkt i en interviewguide (Bilag 4), der søger at afdække matematikvejledernes egen opfattelse af undersøgende og anvendelsesorienteret matematikundervisning samt deres opfattelse af den eksisterende skolepraksis. Interviewene har fokuseret på matematikvejledernes og lærernes erfaringer og holdninger til gode matematikaktiviteter, til planlægning og forandring af undervisningsplaner og til væsentlige faktorer for undervisningen. Desuden har interviewene fokuseret på erfaringer, potentialer og udfordringer i forhold til undersøgende undervisning i matematik. Fokusgruppeinterviewene er transskriberede, og danner grundlag for følgende analyse.

Forandringsteorien for matematik rummer indsatser og tilhørende aktiviteter i form af: (1) tydelig rammesætning, (2) fokus på undersøgende tilgange, (3) begrebs- og pointeorienteret undervisning (4) eksternalisering/repræsentationer, (5) variation og differentiering, (6) dialogisk undervisning og læring, (7) fagligt fokus, og (8) teamsamarbejde.

Gennem en åben kodning af citater fra vejlederinterviewene placeret i de otte indsatser og tilhørende aktiviteter fra forandringsteorien har, vi udviklet en forståelse af væsentlige forhold vedrørende undersøgende matematikundervisning i Danmark. Vejledernes citater bliver herefter brugt til at tolke matematikvejledernes egen opfattelse af undersøgende og anvendelsesorienteret matematikundervisning samt deres opfattelse af de eksisterende skolepraksisser på området.

3.1 TYDELIG RAMMESÆTNING

De fysiske rammer kan have stor betydning for, hvorvidt undersøgende aktiviteter finder sted. Dette gør sig gældende både i form af begrænsninger: "Vi

mangler et sted, hvor de kan være aktive, hvor de godt må være" (fokusgruppeinterview Sjælland) og muligheder: "Lige her udenfor har vi en nyetableret, lækker legeplads; hvis man nu sammen kunne producere forløb, som er lige til at gå til," "Vi kunne kridte noget op, fx en cirkel med 8 felter," "Vi har gode rammer og rum, hvor ikke alle skal "opfinde nyt" hver eneste gang" (fokusgruppeinterview Fyn). Tydelige rammer og mål er stadig udfordringer for lærerne; til gengæld ligger kompetencetænkningen mere til højrebenet i den anvendelsesorienterede og undersøgende tilgang, siger en matematikvejleder: "... jeg synes, at Forenklede Fælles Mål lægger op til kompetencetænkning, at bruge matematikken til noget," "Kollegernes praksis er nok ikke helt sådan; vi er på vej, men så heller ikke mere" (fokusgruppeinterview Nordjylland).

Næsten alle matematikvejlederne tilkendegiver, at meningsfuld iscenesættelse og opstart af et undersøgende forløb er vanskeligt: "Ja, det at starte fælles, gå mange veje og så lukke det ind sammen med eleverne, det er svært og hårdt. Det er svært at nå rundt til alle grupperne; der skal eleverne også være erfarne - det at lukke ind, det er en hård proces" (fokusgruppeinterview Nordjylland). Endelig fremhæves især opsamling som en nødvendig og strukturerende mekanisme i velfungerende undersøgende arbejde: "I forhold til det matematikfaglige skal man få samlet ordentligt op. Der er masser af udfordringer i sådan en uro-proces" (fokusgruppeinterview Nordjylland) og, "De pædagogiske rammer er også vigtige - det er vigtigt med opsamling, når de har fundet ud af noget. I det undersøgende er der jo heller ikke endelige facitter - det er mere vigtigt, hvordan eleverne svarer" (fokusgruppeinterview Fyn).

3.2 FOKUS PÅ UNDERSØGENDE TILGANGE

Det opleves som en udfordring ved undersøgende undervisning, at lærerne forventes at få nye ideer til, hvad eleverne skal arbejde med: "... det er svært spontant at komme på idéerne - det ville være dejligt med en idébank." og "Det er dét at få idéen - lærervejledningen giver ikke altid anvisninger på den type aktiviteter. Ja, lærerne siger: "Det kan vi ikke - vi mangler de materialer, o.s.v."" (fokusgruppeinterview Sjælland), og "En af udfordringerne ligger i mangel på godt materiale - man er nødt til at dække det selv" (fokusgruppeinterview Nordjylland). Den undersøgende undervisning opleves også som tidskrævende: "... men der er meget behov for en tydelig struktur, tydelige præmisser og regler. ... Det kræver meget stor forberedelse - det er ikke nok at sige: "Gå ud på boldbanen og find matematikken" (fokusgruppeinterview Fyn).

Når undersøgende aktiviteter fungerer godt, beskriver matematikvejlederne deres arbejde som at stille de rigtige spørgsmål og facilitere mange forskellige retninger i klasseværelset. Det vil sige, at man skal: "Stille de rigtige spørgsmål, så eleverne undrer sig. Sørg for at spørgsmålene bliver styrende på den rigtige måde" (fokusgruppeinterview Fyn), men også at lærerkraft frigives: "... men når det endelig virker, er man "overflødig," nærmest i "overskud" - på den måde er man frigivet til at være det hjælpende og støttende stillads" (fokusgruppeinterview Fyn).

Men lærerautoriteten kan udfordres af, at elever og forældre har vanskeligt ved at genkende og anerkende aktiviteterne som matematiske: "... eleverne opfatter det ikke altid som matematik.", "Det handler om glæden og oplevelsen og om at få forældrene med på den - det handler jo ikke kun om, at de skal lære

at dividere. Både forældre og elever oplever nogle gange, at det ikke er rigtig matematik" (fokusgruppeinterview Sjælland). En central pointe er det kontroltab, der opleves, når man som lærer ikke præcist ved hvilken retning, elevernes undersøgende aktiviteter vil tage. Det kræver således didaktisk mod at kaste sig ud i undersøgende aktiviteter – da man ikke altid ved, hvor aktiviteterne ender. Det beskrives som: "oplevelsen af at være sårbar. At turde sige til eleverne: "Det ved jeg ikke." At være modig og turde give slip" (fokusgruppeinterview Fyn), "Det betyder, at man ikke har 100 % kontrol, man kender ikke retningen, og der er en potentiel risiko for, at man når til noget matematik, der ikke altid er fantastisk" (fokusgruppeinterview Nordjylland).

Der er dog stadig stor forskel på, i hvor høj grad matematikvejledere og lærere vægter de undersøgende aspekter i matematikundervisningen: "Kollegerne deler dog ikke helt vores opfattelse - lærebogen er stadig det vigtigste, og de har større fokus på færdigheder og er mere resultatorienterede frem for at være anvendelsesorienterede. Et vigtigt aspekt er dog, om de er uddannede eller ej (dvs. om de har linjefag i matematik eller ej)" (fokusgruppeinterview Fyn) og "Dem, der arbejder med, fokuserer på, at eleverne er mere motiverede - de synes, det er spændende. Dem, der modarbejder, opfatter det som et formelt krav - man skal jo variere arbejdsmetoderne. De synes ikke, det er sjovt. Det bliver for livligt, de synes de spilder tiden, man bruger vigtig undervisningstid på noget, som de opfatter som værende useriøst" (fokusgruppeinterview Nordjylland).

Matematikvejlederne fokuserer ikke selv på ydre krav, men snarere på et vigtigt dannelsesaspekt: "Det handler om dannelse, elevernes måde at opfatte verden på, at opfatte virkeligheden og om at forstå virkeligheden - det er den primære grund. Hellere det end hvor mange opgaver kan man nå på 30 minutter. For hvad kan det reelt bruges til" (fokusgruppeinterview Nordjylland).

3.3 BEGREBS- OG POINTEORIENTERET UNDERVISNING

Matematikvejlederne giver udtryk for, at det kræver øvelse og faglig uddannelse at se de matematiske pointer i undersøgende forløb: "Den store forskel mellem uddannede matematikvejledere og ikke-uddannede kolleger er nok detaljerne i det faglige: fx hvad skal det bruges til? Hvorfor er det væsentligt at vide?" (fokusgruppeinterview Fyn). Matematikvejlederne har øje for detaljerne og pointerne og synliggør dem for eleverne: "Jeg plejer altid at undersøge det stofområde, jeg sidder med, og så prøver jeg at finde frem til, hvilke matematiske pointer og begreber, der er vigtige, så jeg får startet og sluttet med de begreber og sørger for at bruge dem i løbet af forløbet" (fokusgruppeinterview Sjælland). Måden at arbejde på giver også rum og mulighed for at orientere undervisningen mod de faglige begreber: "Jeg synes, at videodokumentationer på noget, som er relateret til deres egen verden, hvor de selv finder eksempler og kommer og forklarer begreberne, er rigtig godt" (fokusgruppeinterview Sjælland). Og samtidig fokuserer matematikvejlederne på større og bredere forståelse, som tilmed kan give eleverne glæde ved faget og større selvtillid: "... men man sikrer sig, at de får en bedre forståelse og en bedre selvtillid og mere mod på det, og de finder forhåbentlig ud af at næste gang, de møder et problem, så kan de bare prøve i stedet for at stille sig uforstående over for opgaven. Og den selvtillid er glæden ved matematik - det er altafgørende" (fokusgruppeinterview Nordjylland).

3.4 EKSTERNALISERING/REPRÆSENTATIONER

De anvendelsesorienterede aspekter af faget og større muligheder for tværfaglige forløb giver eleverne adgang til faget på en mere tilgængelig måde: *“Ja, matematikken skulle i spil. Nu har jeg også samfundsfag, og her er det oplagt. Det var matematikken, der var i spil og var i fokus, men vi havde også stor fokus på kildekritik og faglig læsning og på at kunne tale samme (fag)sprog”* (fokusgruppeinterview Fyn). IT-hjælpe midler har også ført til, at matematikfaget kan antage en mere anvendelsesorienteret og undersøgende karakter: *“Det handler om at få set anvendelser af matematikken. Da jeg gik i gymnasiet, var der i differentialregning bare fokus på teknikken. Nu med IT-hjælpe midlerne er der en stor ændring - det undersøgende bliver pludselig overskueligt. De kan se idéen, og deres interesse bliver ikke dræbt”* (fokusgruppeinterview Sjælland).

3.5 VARIATION OG DIFFERENTIERING

Undersøgelser- og anvendelsesorienterede forløb har ofte indbyggede differentieringsmuligheder:

“For det første ser jeg en masse differentieringsmuligheder, ... så er det der med at undersøge noget og selv komme frem til en løsning, det giver så meget mere selvtillid at komme frem til det, end bare lige at få det af sin lærer” (fokusgruppeinterview Nordjylland). Matematikvejlederne pointerer, at det ikke er alle elever, der finder undersøgende forløb tilgængelige, da der her fokuseres på mange ting - fx rammer, tid, elevernes for forståelser og elevernes sproglige udfordringer: *“Rammerne og strukturerne kan egentlig godt have betydning for inklusionsbørn. De har behov for en fastere struktur, som de undersøgende forløb ikke altid har”* (fokusgruppeinterview Fyn), *“Inklusion fylder også en del, for der er altid nogle, der måske mangler de sociale evner eller ikke helt har forstået, hvad der foregår”* (fokusgruppeinterview Sjælland), *“Jeg oplever, at de svage elever finder undersøgende matematikundervisning svær, og faktisk er der også nogle af de stærke elever, der står af - nu bliver det for kreativt!”* (fokusgruppeinterview Nordjylland) *“... De stærke kan man måske nok klare med gode “hvad nu hvis-spørgsmål”, men de svage er et større problem. Og tidsaspektet er vigtigt - især i forhold til de svage elever. Desuden har vi med mange nationaliteter at gøre - bare forholdsordene er svære, så er det svært at begribe, hvad man skal undersøge”* (fokusgruppeinterview Nordjylland). Nogle forløb er til en vis grad lærerstyrede og færdighedsorienterede, mens anvendelsesorienterede forløb med større fokus på forståelse og begrebsforståelse er mere elevorienterede: *“Jeg vil skelne mellem aktiviteter, hvor de skal lære en færdighed eller lære at bruge en færdighed. At forstå matematiske begreber er komplekst. Forløb, hvor de skal lære en færdighed, er nok mere lærerstyrede, fordi eleverne kommer mere på banen i de mere anvendelsesorienterede forløb”* (fokusgruppeinterview Fyn).

3.6 DIALOGISK UNDERVISNING OG LÆRING

Undersøgende undervisning fremmer dialogen i klassen, men egentlig også elevernes indre dialog: *“Den vigtigste dialog er den, de har med hinanden. ... Men den allervigtigste dialog er egentlig den enkelte elevs indre dialog og spørgsmålene om, hvordan de selv kommer videre”* (fokusgruppeinterview Nordjylland), *“Men den kommunikative del af det - også om de uenigheder der opstår, og når ræsonnementet lyder fuldstændig skørt - hvordan forholder vi os til det*

fremadrettet?" (fokusgruppeinterview Sjælland). Undersøgende forløb rummer muligheden for at eleverne opdager og forholder sig til, at der kan findes flere rigtige svar på åbne problemstillinger: "...så skulle de "battle" mod hinanden ved at argumentere for, hvorfor de hver især mener deres svar er rigtigt, og der er en sandsynlighed for, at de kan blive enige om et forkert svar, eller få det argumenteret igennem, men det er meget få gange, at det sker. Men det, at de kan lære at argumentere for dit og dat, det er virkelig en gave" (fokusgruppeinterview Sjælland).

3.7 FAGLIGT FOKUS OG TEAMSAMARBEJDE

Planlægning af undersøgende aktiviteter er meget tidskrævende og fordrer, at lærere samarbejder: "Vi skal have tid til at opfinde og udforske sammen og sparre med hinanden. Vi skal ideudveksle - det er ikke nok at give papirer videre" (fokusgruppeinterview Fyn). Heldigvis er der velfungerende fagteam på samtlige skoler, som de interviewede matematikvejlederne kommer fra, men de undersøgende aspekter af faget opleves desværre at blive trængt op i en krog af de ydre krav hos mange af lærerne: "Evalueringskulturen har påvirket undervisningen meget - man tester færdigheder, og så er det svært at få alle kollegerne med på kompetencetænkningen. Kompetencerne er jo noget sværere at måle. Så bliver det svært at arbejde undersøgende og eksperimenterende" (fokusgruppeinterview Nordjylland). "Opstramningen og diskussionen omkring de nationale test kan jeg godt mærke kommer ind og påvirker undervisningen. Skole-hjem-samtalerne kan også have indvirkning" (fokusgruppeinterview Sjælland). "Det påvirker undervisningen - man vil gerne have at eleverne klarer sig godt i de nationale test. Aldrig har så mange lærere undervist i ordsprogs betydning. Jeg har en frygt for, at undervisningen bliver meget skævvredet" (fokusgruppeinterview Fyn).

Der er altså rum for forbedringer i teamsamarbejdet på skolen, og teamsamarbejde er en vigtig og afgørende faktor for at integrere undersøgende og anvendelsesorienterede aspekter i matematikundervisningen: "Vi skal have det undersøgende italesat - en debat om hvad det vil sige at arbejde undersøgende." "Vi skal have fokus væk fra bogen, eleverne skal være selvproducerende" (fokusgruppeinterview Fyn). "Teamet er det vigtigste, hvis der er en god dialog og et ønske om at arbejde sammen. Men det tager lang tid at skabe denne ånd - det kræver ændringer af grundholdninger for mange - især de ældre kolleger" (fokusgruppeinterview Nord).

3.8 OPSAMLING

Kortlægningen tyder på, at lærerne i den danske folkeskole har forskellige opfat- telser af undersøgende undervisning. En matematikvejleder beskriver det endog som at arbejde "med og imod" – det vil sige, at nogle lærere fokuserer på ydre krav, mens matematikvejlederne snarere fokuserer på begrebsforståelse, på dybdelæring og på at det bliver meningsfuldt for eleverne og motiverer eleverne. Flere af de interviewede angiver, at de lærere, der ikke er linjefagsuddannede, i mindre grad arbejder undersøgende. Endelig angives det, at de mange færdig- heds- og vidensmål i Forenklede Fælles Mål såvel som i nationale test og evalu- eringer i det hele taget er forhold, der øger presset på matematikundervisningen for matematiklærerne og som – i nogle fagforståelser – levner mindre plads til

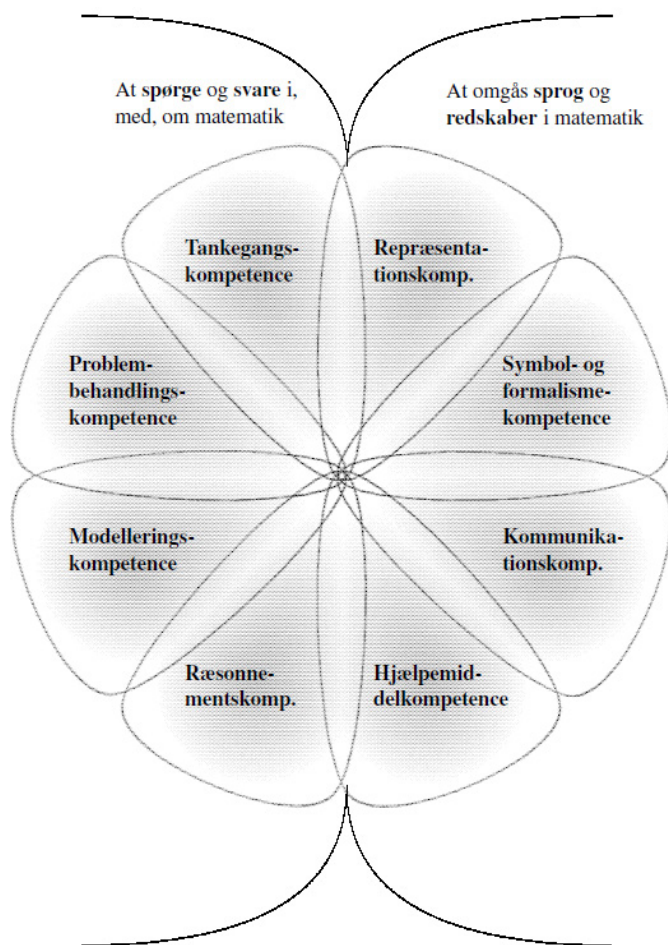
det undersøgende. Undersøgelsesorienterede forløb har nærmest indbygget differentiering. Alligevel er der elevgrupper, der udfordres voldsomt af arbejdsformerne, hvilket giver anledning til overvejelser om reduktion af frihedsgraderne for nogle elevgrupper. Kortlægningen peger desuden på nogle store muligheder i undersøgende aktiviteter i forhold til at udvikle elevernes matematiske dannelse, deres måde at se verden på og deres evne til at skabe mening i matematiske situationer.

Derudover angives der potentialer i form af, at eleverne oplever matematik som relevant og vedkommende: *"Det skal give mening, der er en optagethed, og elevernes motivation og engagement er i fokus"* (fokusgruppeinterview Fyn). Desuden nævnes det, at undersøgelsesbaseret og anvendelsesorienteret matematikundervisning fremmer den dialogiske undervisning samt nogle didaktiske potentialer, der handler om, hvordan lærere og elever interagerer i undervisningen: *"At eleverne oplever, at jeg er der for dem, viser interesse, og at vi kan forundres og glæde os over faget sammen. Jeg oplever dog, at de svage elever ofte finder undersøgende matematikundervisning svær, og faktisk er der også nogle af de stærke elever, der står af. Nu bliver det for kreativt! At modgang er et fælles anliggende. Det er ikke læreren, der kan lægge det fra sig, men i fællesskab må vi finde en vej ind. At eleverne oplever at få selvtillid og brugbare faglige erfaringer"* (fokusgruppeinterview Nordjylland). Fagteamsamarbejdet og faglige fyrtårne i form af matematikvejledere er særdeles vigtige elementer for at få italesat og udbredt undersøgende og anvendelsesorienteret matematikundervisning i den danske folkeskole.

4. DEN DANSKE KOMPETENCEDISKURS I MATEMATIK

Rapporten *Kompetencer Og Matematiklæring*, der i daglig tale omtales som "KOM-rapporten", har haft betydelig indflydelse på matematikundervisningen i den danske grundskole. Indflydelsen har både været tydelig i praksis og i curriculum. Udgangspunktet for projektet var en manglende sammenhæng mellem befolkningens matematikkundskaber og matematikundervisningens udvikling af disse. Det udmøntede sig således i en karakterisering af, hvad matematisk faglighed er i kompetencetermer. En matematisk kompetence er således beskrevet som: "... indsigtfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer." (Niss & Højgaard Jensen, 2002, s. 43).

FIGUR 1 KOMPETENCEBLOMSTEN (NISS & JENSEN, 2002)



Kompetencetænkningen i forhold til matematisk aktivitet er funderet i, at kompetencerne er sammenvævede og på trods af deres relativt velafgrænsede beskrivelse ikke kan eksistere uden hinanden. Kompetencerne er beskrevet i to grupper henholdsvis; *At kunne spørge og svare i, med og om matematik*, samt *At omgås sprog og redskaber i matematik*. Denne opdeling af kompetencerne kommer således til udtryk i *kompetenceblomsten* (se figur 1). Men det er vigtigt, at denne opdeling ikke overfortolkes ved, at kompetencerne i den ene eller den anden gruppe er tættere forbundet end kompetencerne fra hver af de to grupper (Niss & Højgaard Jensen, 2002, s. 46).

De matematiske kompetencer er således rettet mod forskellige matematikholdige situationer. I rapporten beskrives det: *"Udover de sider af matematisk faglighed som vi med disse kompetencer forsøger at indfange har vi fundet det ønskeligt at operere med en type 'aktive indsigter' vedrørende matematikkens karakter og rolle i verden, som ikke har adfærdspræg i direkte forstand."* Disse indsigter benævnes *overblik og dømmekraft over for matematikkens forbindelse til forhold og tilskikkelser i natur, samfund og kultur*. Indsigterne er således rettet mod matematikken som fagområde og ikke mod de matematikholdige situationer, som kompetencerne er rettet mod. De tre former for overblik og dømmekraft, som rapporten nævner, er:

1. Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder
2. Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning
3. Matematikkens karakter som fagområde.

Kompetencetænkningen er således manifesteret ved, at matematiklæring kun kan beskrives ved hjælp af det faglige stof, som matematikundervisningen omhandler. Den består således også af de matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft, som skal sættes i spil i undervisning og matematiklæring generelt. KOM sidestiller de faglige stofområder med de matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft. Stofområdernes rolle er altså den kontekst, i hvilken de matematiske kompetencer situeres.

Siden udarbejdelsen af KOM-rapporten i 2002 har de matematiske kompetencer plantet sig solidt i den fagdidaktiske tænkning i matematik. I Fælles Mål 2009 blev de matematiske kompetencer for første gang inkluderet i faghæftets trinmål (Undervisningsministeriet, 2009). Faghæftet beskriver, hvordan de matematiske kompetencer skal være en del af lærerens forberedelse i forbindelse med, hvad der kaldes for *matematiklærerens tænkeboble* henholdsvis *matematisk arbejdsmåde*, *matematiske emner* og sidst *matematisk kompetence*.

I 2012 udfærdigede EVA en undersøgelse om lærernes brug af Fælles Mål. I denne fremkom resultater om lærernes meget sparsomme anvendelse af Fælles Mål 2009. Rapporten pegede på, at lærerne ikke plan- og tilrettelagde deres undervisning ud fra en målstyret logik, sådan som 1993-lovgivningen har som intention (EVA, 2012). Baggrunden for at lærerne ikke anvendte Fælles Mål 2009 som intenderet var, at lærerne gennem deres undervisning oplevede, at der på trods af planlægning ud fra indhold stadig var kvalitet i undervisningen. Desuden fik lærerne sjældent sat læringsmål for undervisningen. I de tilfælde, hvor de blev anvendt i undervisningen, var koblingen til trinmålene svær at spore. Undersøgelsen påpegede, at brugen af Fælles Mål 2009 således mere havde karakter af en tjekliste eller retningsgiver for årsplanlægningen (EVA, 2012).

De nye Forenklede Fælles Mål blev udarbejdet på baggrund af blandt andet denne EVA-rapport. Heri fremstår de matematiske kompetencer - ligesom i Fælles Mål 2009 - centrale i Forenklede Fælles Mål 2014, hvori de er placeret som et af de fire overordnede *kompetencemål*. I vejledningen hertil præciseres det, at de matematiske kompetencer og stofområderne ikke skal opfattes som isolerede, men skal indgå i et samspil. Der skal således udvælges stof fra stofområderne, som suppleres med mål fra en eller to af de matematiske kompetencer (Undervisningsministeriet, 2017). Dette samspil ses udtrykt i matricen som også fremvises i Niss & Jensen (2002) og her i figur 2.

**FIGUR 2 MATRIX FOR SAMSPILLET MELLEM KOMPETENCER OG STOFOMRÅDER
(UNDERVISNINGSMINISTERIET, 2017)**

	Problembehandling	Modellering	Ræsonnement og tankegang	Repræsentation og symbolbehandling	Kommunikation	Hjælpe midler
Tal og algebra						
Geometri og måling						
Statistik og sandsynlighed						

Rasmussen et al. gennemførte et studie (2017) som et led i evaluerings- og følgeforskningen til folkeskolereformen i 2014. Heri konkluderes det, at Forenklede Fælles Mål styrker lærernes valg af undervisningsmetoder og undervisningsmidler. Til stadighed oplever de dog nogle udfordringer i omsættelsen af intentionerne fra Forenklede Fælles Mål til praksis. Lærerne anvender Forenklede Fælles Mål både i deres planlægning og i deres tilrettelæggelse af undervisningen, men på trods af dette er de stadigvæk udfordrede i forhold til at nedbryde målene til kortere forløb. Lærerne udtrykker dog, at de er bedre klædt på til at opstille læringsmål end de er til at håndtere de tre andre dimensioner i den didaktiske relationsmodel, henholdsvis *undervisningsaktiviteter*, *tegn på læring* og *evaluering* (Rasmussen et al., 2017).

5. FORSKNINGSKORTLÆGNING

Forskningskortlægningen er gennemført som en tematisk læsning af aktuell international forskningslitteratur inden for matematikkens didaktik. Det har været hensigten at foretage en transparent kortlægning af de temaer, som er væsentlige inden for matematikkens didaktik når det gælder muligheder, betingelser og processer vedrørende undersøgende matematikundervisning. Det har ikke været hensigten at lægge vægt på bestemte forskningsmetodikker i denne kortlægning. I stedet har fokus været på at vise hvilke resultater og temaer vedrørende undersøgende matematikundervisning, der tilskrives international videnskabelig anerkendelse og værdi. Begrundelsen for denne tilgang skal findes i et ønske om at supplere og komplementere den kortlægning af litteraturen angående *mathematical literacy*, som Rambøll Management Consulting og Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning producerede i rapporten "Forskningskortlægning Matematik (Mathematical Literacy)" fra 2014. Rapporten afsøger ikke i høj grad forhold om undersøgende matematikundervisning eller herunder inquiry-based learning, men den påpeger dog: "Anvendelsen af konkrete materialer har til hensigt at understøtte eksperimenterende og under-

søgende arbejdsmetoder og give eleverne hands-on-erfaring med matematik." (Dyseggaard, Egeberg & Steenberg, 2014, s. 40). Rapporten havde fokus på *mathematical literacy* og herunder at kortlægge studier med evidensrelaterede metodiske tilgange med det resultat, at der kun i begrænset omfang blev inddraget litteratur fra kernen af det matematikdidaktiske forskningsfelt. Hensigten med den foreliggende forskningskortlægning er at anvende de tilgængelige ressourcer til at finde og tydeliggøre den viden, hvis vigtighed der i det internationale matematikdidaktiske forskningsmiljø er enighed om. Derfor er der udvalgt et relativt lille antal tidsskrifter, som kan anses for at have excellence inden for matematikkens didaktik. Disse tidsskrifter i perioden 2010-2015 udgør kernen i forskningskortlægningen.

5.1 METODISK TILGANG

Der er gennemført en systematisk søgning på *inquiry-based mathematics education* og en række relaterede keywords (se bilag 1) for at indkredse *UDA undervisning - en undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning*. Søgningen er foretaget i følgende tidsskrifters udgivelser fra 2010 til 2016:

- Educational Studies in Mathematics
- Journal for Research in Mathematics Education
- For the Learning of Mathematics
- Journal of Mathematical Behavior
- Journal of Mathematics Teacher Education
- Mathematical Thinking and Learning
- ZDM: The International Journal on Mathematics Education

Tidsskrifterne er udvalgt på baggrund af deres anseelse i det internationale matematikdidaktiske forskningsmiljø og udgør de højest rangerende matematikdidaktiske tidsskrifter i en nylig klassifikation udarbejdet af en kommission nedsat af Education Committee of the European Mathematical Society, Executive Committee of the European Society for Research in Mathematics Education med støtte fra International Commission for Mathematical Instruction (ICMI) (Toerner & Arzarello, 2012).

Relevante keywords til søgeprocessen er udvalgt ved at screene abstracts for artiklerne i ZDM: The International Journal on Mathematics Education 45(6), som er en særudgave om *inquiry-based learning*, samt særudgaven Educational Studies in Mathematics 83(1), der omhandler *problem posing*. Endvidere er der screenet fra særudgaven af ZDM: The International Journal on Mathematics Education 45(2) med titlen *Creativity and mathematics education*, samt fra diskussionsdokumenter fra ICMI der handler om *Applications and Modelling in Mathematics Education*. Derudover blev der tilfældigt udvalgt en udgave af hvert tidsskrift, hvorefter abstracts fra disse blev screenet for relevante keywords. Det drejede sig om følgende udgaver: Journal for Research in Mathematics Education 46(3), For the Learning of Mathematics 35(3), Journal of Mathematical Behavior (39), Journal of Mathematics Teacher Education 18(3), Mathematical Thinking and Learning 17 (2-3) og ZDM: The International Journal on Mathematics Education 47(3).

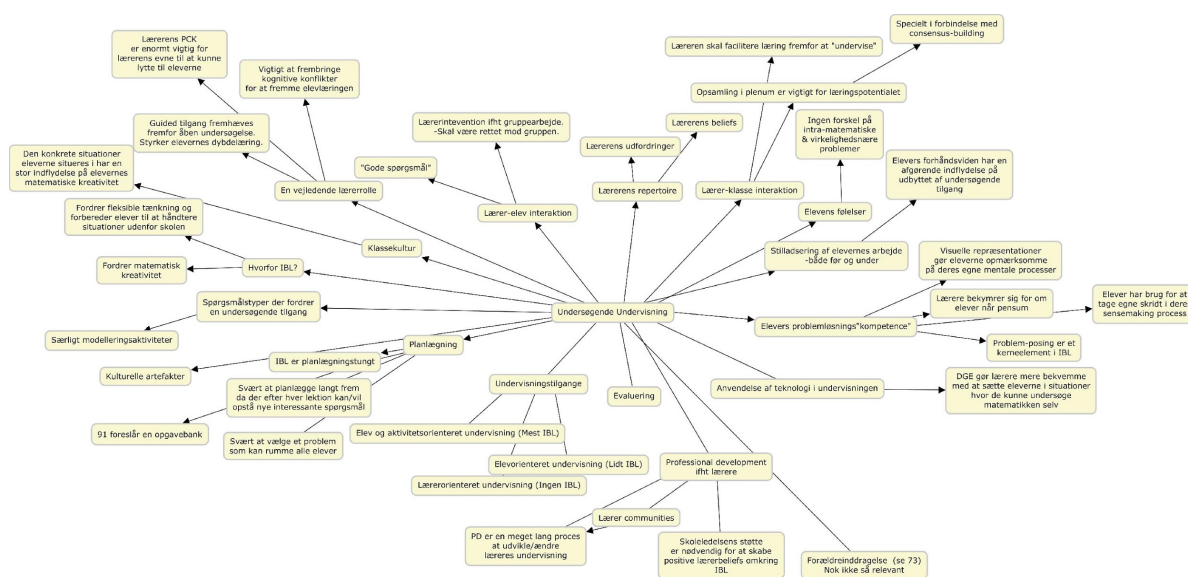
Efter listen af keywords (se bilag 1) var produceret, blev der foretaget en

søgning i databasen MathEduc, som indekserer alle tidsskrifterne i den nævnte periode. I databasesøgningen fremkom alle artikler, hvori keywords optræder i artiklens titel, abstract, keywords eller i artiklens fuldtekst. Der var i alt 170 artikler, som først blev screenet i forhold til, hvorvidt deres titler indikerede, at de med sikkerhed ikke havde relevans for dette projekt. Herefter var der 119 artikler tilbage, som så blev screenet på deres abstract for at se, om dette indikerede, at de med sikkerhed ikke havde relevans for dette projekt. Dette udmøntede sig i, at 62 artikler skulle læses og genbeskrives, inden samskrivningen kunne foretages. Genbeskrivelserne af de 62 artikler blev struktureret ved, at der for hver af artiklerne blev udfyldt et skema med følgende kategorier (se bilag 5 for udfyldt genbeskrivelsesskema):

- Forfatter, år og titel
- Formål
- Land
- Skoleniveau
- Forskningsdesign
- Metoder og data
- Teorier
- Relevans for KiDM
- Nøglefund
- Didaktisk realisering

Efter at alle artiklerne var blevet genbeskrevet, blev deres relevans for KiDM, nøglefund og deres didaktiske realisering struktureret i en mindmap. Se bilag 1 for større version.

FIGUR 3 MINDMAP FOR ARTIKLERNES RELEVANS FOR KIDM, NØGLEFUND OG DERES DIDAKTISKE REALISERING



Dette omfatter en beskrivelse af den geografiske spredning, de anvendte forskningsdesign samt kontekster.

TABEL 1 - STUDIERNES FORDELING PÅ LANDE

UNDERSØGELSESLAND	ANTAL STUDIER
Australien	2
Canada	4
Cypern	1
Europæisk	8
Finland	1
Ikke relevant eller angivet	5
Interkontinentalt	2
Israel	5
Italien	1
New Zealand	3
Norge	4
Oceanien	1
Rumænien	1
Spanien	1
Sydkorea	2
Taiwan	2
Tyskland	4
Ungarn	1
USA	12
Østrig	2
	n=62

Tabel 1 viser studierne geografiske dækning. Forskningen er i høj grad international med en stor mængde fra den vestlige verden. Størstedelen af studierne er foretaget i USA og Europa, henholdsvis 12 og otte studier.

Nedenstående tabel viser de anvendte forskningsdesign i de 62 studier, der er

inkluderet i kortlægningen. Samme studie kan godt optræde flere gange, hvorfor summen af studier ikke giver 62.

TABEL 2 - STUDIERNES FORSKNINGSDESIGN

FORSKNINGSDESIGN	ANTAL STUDIER
Case-studie	37
Kommentar til artikel	3
Kvasi-eksperimentelt design	3
Laboratoriestudie	1
Interventionsdesign	1
Systematisk review	9
Baseline-studie	1
Komparativt studie	3
Survey	3
Eksplorativt studie	2
Lektionsstudie	2
Aktionsstudie	2
Grounded theory	1
	n=62

Som tabellen viser, er hovedparten af studierne baseret på case-studier (37), men der er også et relativt stor antal af systematiske reviews (9). I genbeskrivelserne (bilag 5) findes en nærmere beskrivelse af de enkelte forskningsdesign.

Nedenstående tabel viser den kontekst, i hvilken studierne er berammet. Samme studie kan godt opstå flere gange, hvorfor summen af studier ikke giver 62.

TABEL 3 - STUDIERNES KONTEKST

KONTEKST	ANTAL STUDIER
Dagtilbud	2
Indskoling	10
Mellemtrin	17

Udskoling	25
Gymnasium	17
Universitet	3
Ikke relevant	4
PD af undervisere	5
Hele uddannelses-systemet	1
Læreruddannelse	5
	n=62

Som det fremgår af tabellen, er hovedparten af studierne gennemført i en grundskolekontekst og i en gymnasial kontekst.

Nedenstående tabel viser studierne fordelt på tidsskrifter.

TABEL 4 - STUDIERNE FORDELT PÅ TIDSSKRIFTER

TIDSSKRIFTER	ANTAL STUDIER
Educational Studies in Mathematics	17
Journal for Research in Mathematics Education	1
For the Learning of Mathematics	0
Journal of Mathematical Behavior	8
Journal of Mathematics Teacher Education	6
Mathematical Thinking and Learning	0
ZDM: The International Journal on Mathematics Education	30
	n=62

Som det fremgår af tabellen, er hovedparten af studierne fra henholdsvis ZDM: *The International Journal on Mathematics Education* og *Educational Studies in Mathematics*, hvorimod ingen studier fra *For the Learning of Mathematics* samt *Mathematical Thinking and Learning* er repræsenteret.

5.3 TEMATISK OVERSIGT OVER UNDERSØGENDE MATEMATIKUNDERVISNING

De centrale temaer i forskningskortlægningen er samlet under overskrifter angående (1) de *kommunikative strukturer* i klassen der kan understøtte undersøgende arbejde, (2) de *matematiske kompetencer* og den *matematiske kunnen* der er vigtige for at arbejde undersøgende, (3) den *viden som elever bringer ind i og tager med fra matematikundervisningen* - herunder hvordan eleverne sammenknytter matematik og den virkelige verden og hvordan deres *bredere kognitive og emotionelle kompetencer* kan udvikles - og (4) en række *konkrete håndtag* som man kan bringe i spil i forhold til at understøtte undersøgende undervisning. Det sidste tema i kortlægningen omhandler (5) det vanskelige og vigtige i at understøtte *lærersamarbejde og udvikling af lærerkompetencer* vedrørende undersøgende undervisning.

5.3.1 TEMA 1: KOMMUNIKATION

I undersøgende matematikundervisning spiller kommunikationen mellem *lærer og klasse* samt mellem *lærer og elev* en stor rolle. Selve *klassekulturen* har også stor indflydelse på elevernes læring. De inddragede og relevante studier i forhold til de tre elementer bliver udfoldet i dette afsnit.

De konkrete situationer, som eleverne situeres i, har stærk indflydelse på deres matematiske kreativitet. En proces-orienteret klassekultur med inddragelse af elevernes egne repræsentationer gør det muligt at rammesætte situationer, hvor det er muligt at afdække elevernes vanskeligheder og samtidigt eliminere dem (Sarrazy & Novotná, 2013; Dongwon & Mi-Kyung, 2012; Csikos, Szitanyi & Kelemen, 2011).

I lærer-klasse-interaktionen skal indholdet faciliteres som undersøgende og aktivitetsbærende snarere end som transmission af viden. Læreren skal således dele kontrollen med klassen og den enkelte elev (Towers, Martin & Heater, 2013; Makar 2014; Erfjord, Hundeland, & Carlsen, 2012). I forbindelse med interaktionen på lærer-klasse/gruppe niveau skal kommunikationen være rettet imod fællesskabet - altså imod gruppen eller klassen - og ikke imod en individuel elev (Stender, Kaiser, 2015). Det er afgørende, at læreren faciliterer en undervisning, hvor eleverne får en følelse af ansvar og ejerskab for det matematiske indhold, som de arbejder med. Undervisningen skal således bære præg af, at elevernes aktiviteter er i centrum for undervisningen, og af at deres undersøgelsesresultater bliver taget seriøst.

Det er afgørende, at lærer/elev-interaktionen kendetegnes ved at være elevorienteret og tager udgangspunkt i elevernes forhåndsviden, hvor de arbejder med deres egne strategier. Eleverne har således behov for at tage deres egne skridt for at forstå et problem. Desuden skal læreren indtage en vejledende rolle, da dette giver en positiv effekt på elevernes dybdelæring (Kobiela & Lehrer, 2015; Schukajlow, Kolter & Blum, 2015; Swan, Pead, Doorman, Mooldijk, 2013; Bruder & Prescott, 2013; Jaworski, 2012; Murata, Kattubadi, 2011). Der er behov for lærerstilladsering - især i forhold til diagnosticering af elevernes løsningsproces - samt i forbindelse med elevernes deduktive ræsonnementer, og herunder skal læreren forsøge at bringe eleverne i kognitive konflikter for at øge læringen (Tropper, Leiss, Hänze, 2015; Prusak, Herschkoitz, Schwarz, 2011). Læreren skal i sin facilitering af undervisningen, hvor eleverne er i centrum, sørge for, at ele-

verne er stilladseret blandt andet gennem løbende vejledning i at undersøge det matematiske genstandsfelt.

5.3.2 TEMA 2: MATEMATISK KUNNEN/KOMPETENCE

I undersøgende matematikundervisning er noget matematisk indhold mere oplagt end noget andet, både hvad angår udbyttet for eleverne og hvad angår hvilke typer af opgaver, eleverne kan arbejde med. Problembehandling - herunder problemløsning og problemopstilling - er kerneelementer i undersøgende undervisning. Undervisning præget af modelleringsaktiviteter er særligt fordrende for den undersøgende tilgang. Desuden er der god grobund for, at elevernes matematiske kreativitet bliver udviklet i denne tilgang.

Der er i litteraturen beskrevet tre forskellige måder at kategorisere problemløsning på: 1) et traditionelt blik, 2) et traditionelt blik med en åben tilgang til realistiske overvejelser samt 3) et modelleringsblik. Modelleringsblikket på problembehandling sikrer det største læringspotentiale for eleverne i den undersøgende undervisning (Peled & Balacheff, 2011). Målorienteret undervisning giver større muligheder for at udvikle problemløsningskompetencen end pensumbaseret undervisning (Cai, Moyer, Wang, Hwang, Nie & Garber, 2013). Ifølge litteraturen giver undersøgende undervisning kendetegnet ved et modelleringsblik på problemløsning de bedste rammer for elevernes læring i sammenligning med de andre typer af problemløsning. I forbindelse med problemløsning i undersøgende matematikundervisning er målorienteret undervisning med til at styrke udviklingen af elevernes problemløsningskompetence, hvorfor denne er at foretrække frem for pensumbaseret undervisning.

Problemløsning er korreleret med problemopstilling, og derfor vil undervisning med fokus på det ene også udvikle det andet. Problemopstilling er et kerneelement i undersøgende matematikundervisning enten som et mål i sig selv eller som et middel til at nå andre mål. Hvis eleverne således opfordres til at stille spørgsmål og følge dem til dørs i en undersøgelse, fordrer det en udvikling af elevernes matematiske kompetence i forbindelse med generaliseringer. En sådan opfordring til at stille spørgsmål gør også, at problemopstillingsprocessen vil være en form for autentisk matematisk undersøgelse, der desuden kan øge elevers fleksible tænkning. (Lehrer, Kobiela & Weinberg, 2012; Van Harpen & Sriraman, 2012; Bonotto, 2012; Cai, Moyer, Wang, Hwang, Nie & Garber, 2013; Silver, 2013; Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2011).

Udover problembehandling er modelleringsaktiviteter også i høj grad med til at styrke den undersøgelsesbaserede tilgang til undervisning. Her kan matematiske objekter i sig selv være en essentiel kilde til matematiske undersøgelser med afsæt i en hensigt om at involvere eleverne i modelleringsaktiviteter (Artigue & Blomhøj, 2013). En særlig form for modelleringsaktiviteter er modelfrembringende aktiviteter, hvor eleverne bringes i en situation, der inviterer til modellering. I den form for aktiviteter er elevernes rolle central og giver mulighed for en mere interdisciplinær og virkelighedsnær tilgang, der understøtter deres udvikling af modelleringskompetencen i undersøgende undervisning (Mousoulides, 2013; Kim, Parka, Tamara, Moorea & Varmab, 2013). Denne virkelighedsnære og interdisciplinære tilgang understreger pointen om vigtigheden af kommunikation i undersøgende undervisning, hvor læreren skal afgive kontrol, og hvor eleverne skal være centrum for aktiviteterne. Arbejdet med modellering har des-

uden en positiv emotionel effekt på eleverne, hvorfor det er særligt interessant at arbejde med undersøgende undervisning i matematik (Schukajlow, Leiss, Pekrun, Blum, Müller & Messner, 2011).

Elevernes udbytte af undersøgende matematikundervisning vil blandt andet have en stor, positiv betydning for deres matematiske kreativitet. Den undersøgende tilgang kræver en aktiv og fleksibel tankegang, hvorfor eleverne får en oplevelse af, at matematik også handler om en sådan tankegang (Bruder & Prescott, 2013). Hvis man kun har fokus på at udvikle elevernes matematiske evner, vil deres matematiske kreativitet ikke nødvendigvis udvikles, da matematiske evner ikke er en indikator for, om en elev har høj matematisk kreativitet (Sriraman, Haavold & Kyeonghwa, 2013). Der er dog flere indikationer af, at matematisk kreativitet er en underkompetence af matematiske evner, hvor specielt undersøgende undervisning kan være med til at fordre matematisk kreativitet, når det gælder om at finde originale løsninger (Kattou, Kontoyianni, Demetra & Constantino, 2012).

5.3.3 TEMA 3: IND OG UD AF MATEMATIKKEN

Elevernes viden er central for at arbejde undersøgende, og det gælder både den matematiske forhåndsviden og viden om verden omkring os. Derfor er stilladsering af elevernes arbejde før og under undervisningen med udgangspunkt i elevernes forhåndsviden afgørende for elevernes læringsudbytte. Særligt i forhold til diagnosticeringen af elevens løsningsproces skal læreren være ekstra opmærksom på stilladseringen af eleven. For at eleverne kan arbejde undersøgende i matematik, kræver det en forhåndsviden om emnet - specielt inden for problemopstilling (Schukajlow, Kolter & Blum, 2015; Tropper, Leiss & Hänze, 2015; Calder, 2015; Xianwei, Van Harpen & Presmeg, 2013). Læreren skal altså i sagens natur være opmærksom på elevernes forhåndsviden og skabe rammer, der gør, at de kan bringe den i spil i det undersøgende arbejde.

Hvorvidt der er tale om intra-matematiske problemstillinger, tekstopgaver eller modelleringsproblemer gør ingen forskel i forhold til elevernes begejstring, værdisætning, interesse og selvforståelse. Det er derfor muligt udelukkende at anvende problemstillinger, som er hentet uden for det matematiske domæne, til at vække elevernes positive følelser (Schukajlow, Leiss, Pekrun, Blum, Müller & Messner, 2011). På den anden side set skal man ikke som lærer forvente, at blot fordi man inddrager virkeligheden, så vil eleverne blive mere motiverede for at lære. Derimod er det vigtigt, at der anvendes et bredt spektrum af aktiviteter i undervisningen, hvor mindre strukturerede og mere åbne opgaver fordrer fleksibel tænkning og forbereder eleverne til at håndtere situationer og problemer uden for skolen (Bruder & Prescott, 2013; Krummheuer, Leuzinger-Bohleber, Müææer-Kirch, Münz & Vogel, 2013; Bonotto, 2012). Sluttelig har undersøgende undervisning den relation til verden uden for matematikken, at den omfatter emancipation og demokrati som essentielle elementer, der understøtter elevernes dannelse (Artigue & Blomhøj, 2013).

5.4.4 TEMA 4: VÆRKTØJER TIL PLANLÆGNING OG UDFØRELSE

Litteraturen peger på en række konkrete didaktiske, ressourceorienterede og teknologiske værktøjer til at understøtte undersøgende undervisning.

I undervisning baseret på en undersøgende tilgang er det vigtigt at orkestrere

den kollektive læring. Dette kan blandt andet gøres ved altid at samle op på elevernes resultater og fremgangsmåder i plenum (Towers, Martin & Heater, 2013; Inoue, 2010).

Visuelle repræsentationer er værktøjer til at gøre eleverne opmærksomme på deres egne mentale processer. I tekstopgaver er det vigtigt at arbejde med, hvordan visuelle repræsentationer kan understøtte denne proces (Csikos, Szitanyi & Kelemen, 2011). Teknologi - herunder særligt dynamiske geometriprogrammer - gør lærerne mere villige til at sætte eleverne i situationer, hvor de kan undersøge matematikken på egen hånd (Leikin & Grossmann, 2013).

I planlægningen af undervisningen kan lærerne med fordel forsøge at forudse elevsvarene og forberede gode spørgsmål for at få eleverne videre i processen. De gode spørgsmål bidrager til at stilladsere elevernes undersøgende og generaliserende arbejde med det matematiske indhold (Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2015; Inoue, 2010). For at lette noget på lærernes planlægningsbyrde i undersøgende undervisning i matematik foreslås det i litteraturen at opbygge en opgavebank. Opgaver heri kunne eksempelvis være Fermi-opgaver eller korte, planlagte forløb (Albarracín & Gorgorió, 2014; Hähkiöniemi, 2013; Shuk-kwan, 2012). Elev- og aktivitetsorienteret undervisning giver eleverne mulighed for at forklare og diskutere deres egne idéer. Faget anvendes til at beskrive og forklare verden uden for skolen, og eleverne får mulighed for at udforme og udføre egne eksperimenter. Denne undervisning bidrager i høj grad til, at eleverne arbejder undersøgende og bør derfor være målet for lærernes planlægning. Desuden bærer en sådan undervisning præg af at være dialogisk og kræver, at lærerne har spørgekompetence (Calder, 2015; Engeln, Euler & Maaß, 2013). I elev- og aktivitetsorienteret undervisning opfordres der til, at eleverne anvender *guess and check*-metoden, når de mangler ideer til fremgangsmåder, der kan bruges til at tackle det pågældende problem (Capraro, Song, Ma, Rangel-Chavez & Harbaugh, 2011).

Der findes flere analyseværktøjer, som lærerne kan anvende i forbindelse med undersøgende undervisning. Schukajlow, Kolter & Blum (2015) nævner, at modelleringskompetencen øges markant ved at stilladsere en løsningsplan. En løsningsplan er meget elevcentreret, og anvendelsen af en sådan medvirker derved til en undersøgende tilgang. Til at analysere elevernes problemopstilling eller problemløsningsprocesser findes der analyseværktøjer, der kan organisere tænkningen angående komplekse, interrelaterede fænomener og udvikle et sprog til at kommunikere om dette (Singer & Voica, 2012; Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2011; Peled & Balacheff, 2011). Inoue (2015) beskriver fem punkter, som er vigtige pejlemærker for vellykket, undersøgelsesbaseret matematikundervisning: 1) *Know what you are asking*; 2) *Anticipate students' responses during lesson planning*; 3) *Releasing control to students*; 4) *Don't hesitate to provide traffic control*; 5) *Always follow up*.

5.4.5 TEMA 5: LÆRERSAMARBEJDE OG UDVIKLING

I litteraturen om undersøgende matematikundervisning udgør lærersamarbejde og udvikling af lærerkompetencer omfattende temaer, som omhandler lærernes repertoire, hvordan man udvikler deres kompetencer, hvordan man opretholder og ikke mindst fastholder lærersamarbejde, hvordan lærerne kan planlægge undervisningen samt spørgsmålet om hvorvidt konteksten, hvori undervisningen

er baseret, kan have en stor indflydelse.

Lærerne skal udvikle deres undervisningsrepertoire, så de har kompetencer i og forståelse af at undervise undersøgende. Dette er dog en stor udfordring, hvis lærerne ikke selv har oplevet den undersøgende tilgang i deres egen skoletid, hvis den allokerede undervisningstid ikke er tilstrækkelig, hvis undervisningen er influeret af *teaching to the test*, eller hvis den enkelte lærer står alene med opgaven (Chin & Lin, 2013). Det er vigtigt, at lærerne er tydelige i deres intentioner, når det gælder den didaktiske situation, som de forbereder (Sarrazy & Novotná, 2013; Maaß & Doorman, 2013).

I forbindelse med evaluering er der indikationer af, at kriterierne og måderne, hvorpå der evalueres, sjældent er baseret på litteratur, men oftere er konstrueret ad hoc. Der er ingen enkelt metode, der kan evaluere kompetencernes fulde omfang. I forbindelse med evaluering af matematiske kompetencer henvises der til Højgaard's rumfangsmodel (Højgaard beskrevet i Frejd, 2013). Hvis lærerne er tydelige i deres intention, vil de have større kapacitet til at rammesætte situationer, hvor det er muligt både at afdække elevernes vanskeligheder og samtidig eliminere dem (Sarrazy & Novotná, 2013). En væsentlig bekymring for lærerne er, hvorvidt eleverne når at få dækket de obligatoriske mål, og samtidig er det en bekymring, at den undersøgende tilgang ikke tillader eleverne at opleve matematikken som en unik struktur af indbyrdes relaterede begreber (Schoenfeld & Kilpatrick, 2013; Swan, Peard, Doorman, Mooldijk, 2013). Ændringer i curriculum vil sjældent medføre ændringer af evalueringspraksis, da *teaching to the test* er en dominerende tilgang i den vestlige verden. Dette skyldes, at man i de fleste lande i det politiske system opfatter testresultater som mål for effektiv skoleledelse. Gabet mellem politiske prioriteter og implementeringen af dem i praksis har med andre ord stor virkning på evalueringspraksis (Wale & Burkhardt, 2013).

Lærerens planlægning er tidskrævende i undersøgende matematikundervisning. Det er desuden besværligt at planlægge længere frem, da der efter hver lektion kan og som oftest vil opstå nye interessante spørgsmål, der kan forfølges. Et af de store problemer, lærerne har, er netop at udvælge problemer af en type, der har potentiale til at engagere alle elever i en klasse i at konstruere og teste matematiske hypoteser (Goodchild, Fuglestad & Jaworski, 2013; Lehrer, Kobiela & Weinberg, 2012; Dongwon & Mi-Kyung, 2012). Lærernes værdier har indflydelse på deres valg af opgaver inden for undersøgende undervisning; de vælger ofte opgaver, der involverer fysiske repræsentationer, promoverer en ikke-standard måde at tænke på og har et element af noget "sjovt" for eleverne (Levenson, 2013).

For læreren er evnen til at lytte til eleverne vigtig for deres spørgekompetence, og *knowledge of content and students* er i den forbindelse vigtig for lærernes evne til at lytte til eleverne. I forbindelse med at svare eller spørge ind til eleverne kommer lærerens *specialized content knowledge* i spil, da læreren skal engagere sig i elevernes tænkning. Et højt niveau af *curricular content knowledge* kan således ikke stå alene (Johnson, 2013; Johnson & Larsen, 2011).

Professionel udvikling er en meget langvarig proces i forhold til at udvikle og forandre lærernes tilgang til undervisning (Chapman & Heater, 2010). Langvarige nationale projekter har bedre muligheder for at følge en implementeringsstrategi end tidsbegrænsede, internationale projekter, der ofte er udfordret af forskellige kulturer og uddannelseskontekster på tværs af de deltagende lande

(Maaß & Artigue, 2013). Tilbud til lærerne med henblik på at fremme den undersøgende tilgang skal suppleres med en systematisk og bæredygtig strategi, der kan understøtte lærernes professionelle udvikling (Dorier & Garcia, 2013). Anvendelse af forskerplanlagte korte forløb i en undersøgelsesbaseret kontekst med teknologi kan bidrage til lærernes refleksioner over, hvordan undersøgende undervisning adskiller sig fra deres egen undervisning (Hähkiöniemi, 2013; Anthony, Hunter & Thompson, 2014). I et professionelt udviklingsperspektiv er det vigtigt, at lærerne internaliserer undersøgelsesbegrebet i deres egen praksis og ikke oplever det som et eksternt pres fra ledelsen. Den pædagogiske udvikling skal med andre ord være meningsfuld set fra lærerens synspunkt (Chapman 2011; Towers, 2009; Erfjord, Hundeland, & Carlsen, 2012).

Lærerpraksisfællesskaber og kollaborativt arbejde mellem lærere er vanskelige størrelser at etablere, fastholde og udnytte, men når de fungerer, er de særdeles anvendelige i understøttelsen af undersøgende undervisning (Kraimer & Zehetmeier, 2013; Stillman, 2013; Towers, 2009; Hunter, 2010). Lærere er mest motiverede for at lære af andre læreres erfaringer på samme klassetrin, hvorimod fagdidaktikeres forslag slår mindre igennem, hvis ikke de har fokus på skolens curriculum. Lærerne efterspørger altså viden, der har karakter af at være et værktøj (Goodchild, 2014; Jung & Brady 2016). Det er dog især vigtigt, at lærerne lærer at *talk the talk* om undersøgende undervisning for at de kan dele erfaringer med hinanden (Towers 2009).

Skoleledelsens støtte er nødvendig for at skabe positive og vedvarende lærer-beliefs, når det gælder undersøgende undervisning, og der kan være udfordringer i måden, hvorpå ledelsen måler lærernes præstationer (Kraimer & Zehetmeier, 2013; Towers, 2009). Det er derfor af stor vigtighed, at der reflekteres nøje over måden, hvorpå lærernes præstationer måles, således at lærerne også vil finde denne evaluering meningsfuld. Lærernes evne til at inddrage forældrene har også betydning, da forældreinddragelse kan bidrage til et højt aktivitetsniveau hos eleverne. Særligt fremhæves modelfrembringende aktiviteter som en mulighed for en mere interdisciplinær og virkelighedsnær tilgang. Heri er elevernes rolle central, og forældrenes deltagelse har potentiale til at have positiv indflydelse (Mousoulides, 2013).

Konteksten og traditionerne, som undervisningen finder sted i, har signifikant indflydelse på undervisningens udformning. Det er derfor vigtigt at være særligt opmærksom på de forhold, der kan gøre sig gældende i den konkrete kontekst, i hvilken man befinder sig (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013; Sarrazy & Novotná, 2013). I en dansk kontekst er det med andre ord vigtigt, at vi er klar over, hvad der er på spil her i forhold til at lære af erfaringer fra en anden kontekst, som kan være væsensforskellig fra den danske.

5.5 OPSUMMERING AF RESULTATER

I forskningskortlægningen fremkom fem tematikker, som dækker et bredt område inden for matematikkens didaktik. At undervise ud fra en inquiry-based learning-tilgang medvirker til og bør give anledning til, at eleverne tager ejerskab samtidig med, at læreren slipper kontrollen og deler den med eleverne. Dette medfører ligeledes en anderledes rolle end den traditionelle lærerrolle; heri skal læreren således være vejledende for at kunne give de bedst mulige rammer for læring. I kraft heraf skal undervisningen være aktivitetsdrevet, og eleverne skal

være centrale i en sådan undervisning. For at kunne håndtere undervisning med inquiry-based tilgang peger forskningen på forskellige konkrete håndtag, som læreren kan anvende i sin forberedelse og gennemførelse af undervisningen. Ligeledes er der konkrete elementer, som forskningen peger på er bekymrende for lærerne - herunder at eleverne ikke får mulighed for at se den unikke struktur og interrelationen mellem matematiske begreber samt en bekymring for, at man ikke når hele pensummet. Forskningen foreskriver, at for at imødekomme blandt andet disse bekymringer er det af stor vigtighed, at lærerfællesskaber og -samarbejde etableres og fastholdes. I forbindelse med elevernes udbytte tyder forskningen på, at der ikke findes enkelte faglige områder, som er kerneelementer i undervisning med inquiry-based learning-tilgang. Det påpeges dog, at modellering, problembehandling og matematisk kreativitet har gode muligheder for udvikling med en sådan tilgang. Endvidere findes der også viden, der påpeger, at inquiry-based learning styrker elevernes fleksible tænkning og medvirker til udvikling af demokratisk og emancipatorisk tænkning.

6. DESIGNPRINCIPPER FOR INTERVENTIONEN

Interventionen skal aktivere de gennem praksis- og forskningskortlægningen erhvervede indsigter om undersøgende undervisning. Forskningskortlægningen bidrager ikke med *best practice*, men med en viden om de centrale temaer der er indlejret i undersøgende undervisning. Tematikkerne kalder dog på centrale fokusområder for indsatsen. Matematikindsatsen er indrammet af en forandringsteori, der har fokus på lærersamarbejde, rammesætning, den undersøgende tilgangs begrebs- og vidensorientering, repræsentationer og sprog samt dialogiske processer i klasseværelset. Interventionen er derudover baseret på, hvad de praktiske forhold tillader.

Udgangspunktet har været at udvikle en form for undervisning, der følger tre centrale principper, som er funderet i praksis- og forskningskortlægningen:

- Undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger elevens forståelse for matematiske begreber og udvikler hensigtsmæssige arbejdsmåder.
- Undervisning, hvor eleverne oplever indholdet meningsfuldt både med udgangspunkt i faget selv og i fagets anvendelse, øger elevernes motivation.
- Undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at implementere de matematiske kompetencer.

Disse principper udfoldes og relateres til kortlægningen nedenfor.

PRINCIP 1: Undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger elevens forståelse for matematiske begreber og udvikler hensigtsmæssige arbejdsmåder.

Ved både at fokusere på det undersøgelsesorienterede, det anvendelsesorienterede og det dialogiske samler vi de tre centrale resultater fra forsknings-

kortlægningen. Det dialogiske klima i klassen har (jf. forskningskortlægningen) stor betydning for, hvorvidt undersøgende aktiviteter kan gennemføres. Lærer/elev-kommunikationen har central betydning for, om eleverne vil bidrage med egne opfattelser og anskuelser og bliver mødt på måder, der muliggør videre læring med udgangspunkt heri (jf. afsnittet om kommunikation). Elevdeltagelse og fokus på elevens arbejdsproces er et af de centrale didaktiske valg, man kan anvende til at understøtte undersøgende arbejde (jf. afsnittet om værktøjer til planlægning og udførelse). Ligeledes er de åbne modelleringsaktiviteter med til at aktivere vigtige matematiske kompetencer og understøtte, at eleverne bringer deres egen viden i spil i matematiske situationer (jf. afsnittet "Ind og ud af matematikken"). Sluttelig viser både forskningskortlægningen og praksiskortlægningen, at det er væsentligt, at det undersøgende arbejde ikke overser de matematiske begreber, således at manglen på matematisk viden ikke frarøver eleverne muligheden for at deltage i undersøgende aktiviteter.

PRINCIP 2: Undervisning hvor eleverne oplever indholdet meningsfuldt både med udgangspunkt i faget selv og i fagets anvendelse øger elevernes motivation.

Meningsfuldhed er afgørende for, at åben og undersøgende undervisning kan fungere. Forskningskortlægningen viser, at meningsfuldhed ikke alene skal ansues som hørende til det matematiske domæne eller til forhold uden for dette domæne, men snarere som et tema, der går på tværs af disse domæner (jf. afsnittet "Ind og ud af matematikken"). Meningsfuldhed på tværs af domæner understøttes af kommunikationen mellem lærerne og eleverne, så der i højere grad kan tages udgangspunkt i elevernes forhåndsviden (jf. afsnittet om kommunikation). Ved at arbejde hen imod at opbygge aktiviteter, der opleves meningsfulde på tværs af domæner, håber vi også at tilgodese de forskellige lærertyper, der (jf. praksiskortlægningen) er til stede i den danske folkeskole.

PRINCIP 3: Undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at implementere de matematiske kompetencer.

Det er et tydeligt resultat i forskningskortlægningen, at succesfuld gennemførelse af undersøgende aktiviteter er tæt knyttet til elev- og aktivitetsorienteret undervisning (jf. afsnittet om værktøjer til planlægning og udførelse). Ved at fremhæve det dialogiske anerkendes det, at klassens kommunikative normer og strukturer er væsentlige for, at eleverne kan bringe deres viden om matematik og om verden ind i deres matematiske undersøgelser (jf. afsnittet om kommunikation). Endeligt er det tydeligt, at tæt tilknytning til anvendelse og modellering er vigtige aspekter af meningsfulde matematiske undersøgelser (jf. afsnittet "Ind og ud af matematikken").

7. KONKLUSION

Denne praksis- og forskningskortlægning viser, at lærerne i den danske folkeskole har ret forskellige opfattelser af undersøgende undervisning. Variationen i opfattelser af hvad undersøgende undervisning er, de mange eksterne krav som skolen er underlagt, samt de forskelle, der eksisterer i lærerkompetence-niveau, er alle faktorer, der vanskeliggør undersøgende arbejde.

Desuden viser praksiskortlægningen på den ene side, at nogle elever udfordres af undersøgende arbejdsformer og på den anden side, at disse arbejdsformer byder på nogle fordelagtige muligheder i forhold til at udvikle elevernes matematiske dannelse og oplevelse af mening i matematikundervisningen. Endelig tyder kortlægningen på, at undersøgende tilgange til matematik trives godt sammen med dialogiske tilgange til undervisning, og at udvikling af disse didaktiske tilgange kræver en god kapacitetsopbygningsinfrastruktur på skolerne.

Forskningskortlægningen understøtter de fleste af pointerne fra praksiskortlægningen. Fx bekræfter resultatet om, at den kommunikative struktur i klasseværelset er vigtig for undersøgende undervisning, det formålstjenlige i at arbejde med dialogiske arbejdsformer. Forskningen peger endvidere på, at der skal et vist niveau af kompetence og matematisk indholdsviden til hos eleverne for at kunne gennemføre matematiske undersøgelser tilfredsstillende, hvilket kaster lys over, hvorfor undersøgende undervisning kan være en udfordring for nogle elever. Forskningen i undersøgende matematikundervisning kredser en del om den viden, som eleverne bringer ind i og tager med fra matematikundervisningen, og dette passer godt med de dannelsespotentialer og muligheden for meningsfuld undervisning, som italesættes i praksiskortlægningen. Endelig peger forskningen både på en række konkrete håndtag, som man kan bringe i spil i forhold til at understøtte undersøgende undervisning og på nødvendigheden af efteruddannelses- og kapacitetsopbygningstiltag.

Sluttelig er det værd at pointere, at den her anvendte tilgang til kortlægning er anderledes end i rapporten "Forskningskortlægning Matematik (Mathematical Literacy)" fra Rambøll Management Consulting og Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning. Der er også fundet andre resultater og studier. Således er der i den foreliggende forskningskortlægning kun to kvasi-eksperimentielle studier, hvilket viser, at et metodedrevet review ville frembringe helt andre resultater.

Konklusioner på praksis- og forskningskortlægning begrundes og kvalificeres de designprincipper, på grundlag af hvilke interventionen i KiDM er opbygget. Disse principper omhandler (1) undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger effekten af elevens forståelse for matematiske begreber og udvikler hensigtsmæssige arbejdsmåder, (2) undervisning hvor eleverne oplever indholdet meningsfuldt både med udgangspunkt i faget selv og i fagets anvendelse øger motivationen, og (3) undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at implementere de matematiske kompetencer.

Principperne har fokus på det undersøgelsesorienterede, det anvendelsesorienterede og det dialogiske og afspejler således resultaterne fra forskningskortlægningen. Indsatsen kaldes derfor *UDA-undervisning – undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning*. Det dialogiske klima i klassen og

lærer/elev-kommunikationen er vigtige temaer i den internationale litteratur og i forskningskortlægningen. Begrebsorienteringen vil forhåbentlig understøtte, at alle elever får udbytte af aktiviteterne og mulighed for at deltage i undersøgende aktiviteter. Principperne fokuserer desuden på aktiviteterne meningsfuldhed og elevernes motivation. Spørgsmål angående mening og motivation er tæt knyttet til elevernes mulighed for at knytte matematikken i undervisningen sammen med verden uden for skolen, hvilket er et centralt tema i forskningskortlægningen. Endelig fokuserer designprincipperne på at implementere de matematiske kompetencer, der er væsentlige for, at eleverne kan bringe deres viden om matematik og om verden ind i deres matematiske undersøgelser.

LITTERATURLISTE

- Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educ. Stud. Math.* 86, No. 1, 79-96.
- Anthony, G., Hunter, R. & Thompson, Z. (2014). Expansive learning: lessons from one teacher's learning journey. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 46, No. 2, 279-291.
- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 797-810.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 37-55.
- Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 811-822.
- Cai, J., Hwang, S. & Moyer, J., C. (2016). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning: a response. *Educ. Stud. Math.* 91, No. 1, 9-10.
- Cai, J., Moyer, J., C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B. & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 57-69.
- Calder, Nigel (2015). Student wonderings: scaffolding student understanding within student-centred inquiry learning. *ZDM, Math. Educ.* 47, No. 7, 1121-1131.
- Capraro, M. M., An, S. A., Ma, T., Rangel-Chavez, A., F. & Harbaugh, A. (2012). An investigation of preservice teachers' use of guess and check in solving a semi open-ended mathematics problem. *J. Math. Behav.* 31, No. 1, 105-116.
- Chapman, O. & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *J. Math. Teach. Educ.* 13, No. 6, *Special Issue: Mathematics Teacher and Mathematics Teacher Educator Change - Insight Through Theoretical Perspectives. Pt. 2. Laurinda Brown (Guest Editor)*, 445-458.
- Chapman, O. (2011). Elementary school teachers' growth in inquiry-based teaching of mathematics. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 43, No. 6-7, 951-963.
- Chin, E. & Lin, F. (2013). A survey of the practice of a large-scale implementation of inquiry-based mathematics teaching: from Taiwan's perspective. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 919-923.
- Csíkó, C., Sztányi, J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: a design experiment with third-grade Hungarian students. *Educ. Stud. Math.* 81, No. 1, 47-65.
- Dongwon, K., & Mi-Kyung, J. (2012). A changing trajectory of proof learning in the geometry inquiry classroom. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 44, No. 2, 149-160.
- Dorier, J. & García, F., J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 837-849.
- Dyssegaard, C. B., Egeberg, J. d. H., & Steenberg, K. (2014). Matematik (mathematical literacy). Kbh.: Rambøll.
- Engeln, K., Euler, M. & Maaß, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 823-836.
- Erfjord, I., Hundeland, P., S. & Carlsen, M. (2012). Kindergarten teachers' accounts of their developing mathematical practice. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 44, No. 5,

653-664.

- Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment – a literature review. *Educ. Stud. Math.* 84, No. 3, 413-438.
- Goodchild, S. (2014). Mathematics teaching development: learning from developmental research in Norway. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 46, No. 2, 305-316.
- Goodchild, S., Fuglestad, Anne B. & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educ. Stud. Math.* 84, No. 3, 393-412.
- Hunter, R. (2010). Changing roles and identities in the construction of a community of mathematical inquiry. *J. Math. Teach. Educ.* 13, No. 5, Special Issue: *Mathematics Teacher and Mathematics Teacher Educator Change-Insight through theoretical perspectives. Pt 1: Guest Editor: Laurinda Brown*, 397-409.
- Hähkiöniemi, M. (2013). Teacher's reflections on experimenting with technology-enriched inquiry-based mathematics teaching with a preplanned teaching unit. *J. Math. Behav.* 32, No. 3, 295-308.
- Inoue, Noriyuki. (2011). Zen and the art of neriage: facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *J. Math. Teach. Educ.* 14, No. 1, 5-23.
- Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 44, No. 5, 613-625.
- Jensen S., Linda. (2013). Creativity and school mathematics: some modest observations. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 2, 325-332.
- Johnson, E. (2013). Teachers' mathematical activity in inquiry-oriented instruction. *J. Math. Behav.* 32, No. 4, 761-775.
- Johnson, E., M., S. & Larsen, S., P. (2011). Teacher listening: the role of knowledge of content and students. *J. Math. Behav.* 31, No. 1, 117-129.
- Jung, H. & Brady, C. (2016). Roles of a teacher and researcher during in situ professional development around the implementation of mathematical modeling tasks. *J. Math. Teach. Educ.* 19, No. 2-3, 277-295.
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 2, 167-181.
- Kim, Y., R, Park, M., S., Moore, T. J. & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. *J. Math. Behav.* 32, No. 3, 377-396.
- Kobiela, M. & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *J. Res. Math. Educ.* 46, No. 4, 423-454.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *J. Math. Behav.* 31, No. 1, 149-161.
- Krainer, K. & Zehetmeier, S. (2013). Inquiry-based learning for students, teachers, researchers, and representatives of educational administration and policy: reflections on a nation-wide initiative fostering educational innovations. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 875-886.
- Krummheuer, G., Leuzinger-Bohleber, M., Müller-Kirchof, M., Münz, M. & Vogel, R. (2013). Explaining the mathematical creativity of a young boy: an interdisciplinary venture between mathematics education and psychoanalysis. *Educ.*

- Stud. Math.* 84, No. 2, 183-199.
- Lehrer, R., Kobiela, M. & Weinberg, P., J. (2013). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 3, 365-376.
- Leikin, R. & Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educ. Stud. Math.* 82, No. 3, 515-531.
- Leung, S., S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 103-116.
- Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: teachers' choices. *J. Math. Teach. Educ.* 16, No. 4, 269-291.
- Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. *Educ. Stud. Math.* 86, No. 1, 61-78.
- Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM, Math. Educ.* 47, No. 7, 1107-1120.
- Mousoulides, N., G. (2013). Facilitating parental engagement in school mathematics and science through inquiry-based learning: an examination of teachers' and parents' beliefs. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 863-874.
- Murata, A. & Kattubadi, S. (2012). Grade 3 students' mathematization through modeling: situation models and solution models with multi-digit subtraction problem solving. *J. Math. Behav.* 31, No. 1, 15-28.
- Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 779-795.
- Maaß, K. & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 887-899.
- Niss, M., & Jensen, T. H. (red.). (2002). Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (1. udg). Kbh.: Undervisningsministeriet.
- Peled, I. & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 43, No. 2, 307-315.
- Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 5, 685-698.
- Prusak, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B., B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educ. Stud. Math.* 79, No. 1, 19-40.
- Rasmussen, J., Rasch-Christensen, A., Molbæk, M., Kristensen, R. M., Lorentzen, R. F., Reimer, D., & Torre, A. (2017). Undervisning med Fælles Mål i dansk og matematik - Et overvejende kvalitativt mixed methods studie (s. 158): DPU, Aarhus Universitet og UC VIA.
- Sarrazy, B. & Novotná, J. (2013). Didactical contract and responsiveness to didactical contract: a theoretical framework for enquiry into students' creativity in mathematics. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 2, 281-293.
- Schoenfeld, A., H. & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 901-909.
- Schukajlow, S., Kolter, J. & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM, Math. Educ.* 47, No. 7, 1241-1254.

- Schukajlow, S., Leiss, D., P., Reinhard; B., W. & Müller, M., Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educ. Stud. Math.* 79, No. 2, 215-237.
- Silver, Edward A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 157-162.
- Singer, F., M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 9-26.
- Sriraman, B., Haavold, P. & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: a commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 2, 215-225.
- Stender, P. & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM, Math. Educ.* 47, No. 7, 1255-1267.
- Stillman, G., A. (2013). Implementation of IBL in Europe from an Australasian perspective. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 911-918.
- Swan, M., Pead, D., Doorman, M. & Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 7, 945-957.
- Toerner, G & Arzarello, F. (2012). Grading Mathematics Education Research Journals. *EMS Newsletter December 2012*, 52-54
- Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *J. Math. Teach. Educ.* 13, No. 3, 243-263.
- Towers, J., Martin, L., C. & Heater, B. (2013). Teaching and learning mathematics in the collective. *J. Math. Behav.* 32, No. 3, 424-433.
- Tropper, N., Leiss, D. & Hänze, M. (2015). Teachers' temporary support and worked-out examples as elements of scaffolding in mathematical modeling. *ZDM, Math. Educ.* 47, No. 7, 1225-1240.
- Undervisningsministeriet. (2009). Fælles Mål 2009 Matematik - Faghæfte 12. København: Undervisningsministeriet.
- Undervisningsministeriet. (2017). Vejledning for faget matematik, lokaliseret 11-06-2017, 2017, fra <http://www.emu.dk/modul/vejledning-faget-matematik>
- van Harpen, X., Y. & Presmeg, N., C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educ. Stud. Math.* 83, No. 1, 117-132.
- van Harpen, X., Y. & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educ. Stud. Math.* 82, No. 2, 201-221.
- Wake, G., D. & Burkhardt, H. (2013). Understanding the European policy landscape and its impact on change in mathematics and science pedagogies. *ZDM, Int. J. Math. Educ.* 45, No. 6, 851-861.