



# Undersøgende matematikundervisning

En ny tilgang til at støtte til at eleverne øger deres kompetencer i at udforske, systematisere og argumentere i matematiske situationer

LÆRE  
MIDDEL  
DK

Få adgang til 25 undervisningsforløb, hvor eleverne undersøger matematiske situationer.

Ny forskningsbaseret storskala-projekt i at undervise i matematik.

# Hvad kan du læse

I denne folder kan du læse om undersøgende matematikundervisning, der er en måde at undervise i matematik på, der har fokus på at støtte eleverne i at udforske, systematisere og argumentere i matematiske situationer. Tilgangen er udviklet på baggrund af internationale erfaringer og afprøvet i en masse danske 4. og 5. klasser med gode resultater. I folderen kan du se, hvordan du får adgang til nye undervisningsforløb, hvor eleverne undersøger matematiske situationer.

## Baggrund

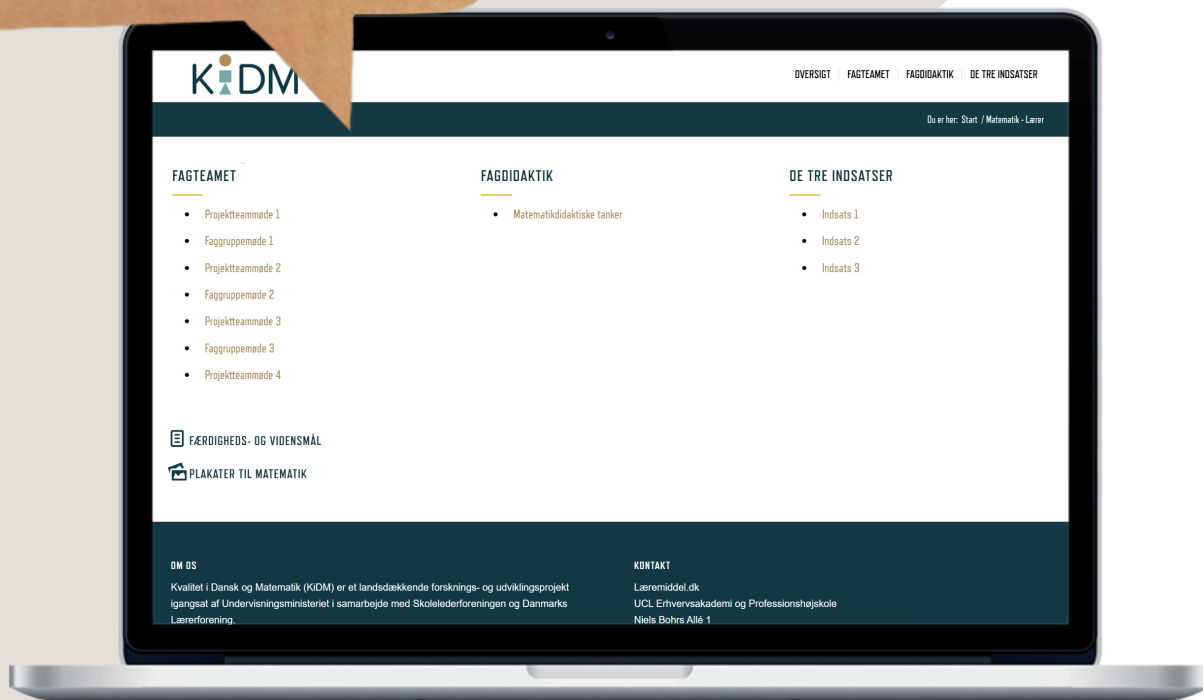
Baggrunden for denne folder er projektet Kvalitet i Dansk og Matematik (KiDM), som i perioden 2016 - 2018 har arbejdet med at udvikle en undersøgende tilgang til matematikundervisningen på 4. - 5. klassetrin, at dokumentere effekterne af en sådan undervisning og at sprede viden om projektet. Vores tolkning af kvalitetsmæssige forandringer tog dengang udgangspunkt i de seneste indtryk fra undersøgelser, som tydede på en ubalance mellem den træningsorienterede/formidlende undervisning og den undersøgende undervisning. En ubalance, hvor den træningsorienterede og formidlende undervisning typisk havde en ret dominerende rolle i danske klasselokaler.

Indsatserne i projektet blev gennemført over tre perioder af hver et halvt års varighed fra efteråret 2017 til efteråret 2018 med 45 forsøgsskoler og 45 kontrolskoler med samlet 143 repræsentativt udvalgte 4. - 5. klasser. Effekten af indsatserne blev dokumenteret gennem et lodtrækningsforsøg.

Til brug for gennemførsel af projektet blev der udviklet 25 forløb, der hver dækker 2 - 4 lektioner. Det betyder, at materialet understøtter 3 - 4 måneders matematikundervisning. Materialet er tilgængeligt på hjemmesiden [www.kidm.dk](http://www.kidm.dk).

Den samlede rapport kan downloades fra [uvm.dk](http://uvm.dk).

Bedre kvalitet i  
Matematik



## Fagteamet

Oplæg til fagteammøder

## Fagdidaktik

De fagdidaktiske overvejelser og valg, som ligger bag projektet

## De tre indsatser

Det understøttende materiale i tre dele efter stofområderne i Fælles mål - hver ca. med en måneds varighed.

- Indsats 1 vedrørte Tal og algebra
- Indsats 2 vedrørte Geometri
- Indsats 3 vedrørte Statistik og sandsynlighed

Materialet består af udførlige lektionsplaner og vejledninger med understøttende elevark. Derudover videosekvenser, it-filer m.m.

# Hvad menes der med undersøgende?

Undersøgende matematikundervisning fokuserer på elevers matematiske udforskning af åbne situationer. Undersøgende matematikundervisning adskiller sig herved fra mere traditionelle tilgange, hvor hovedfokus er på træning af matematiske færdigheder.

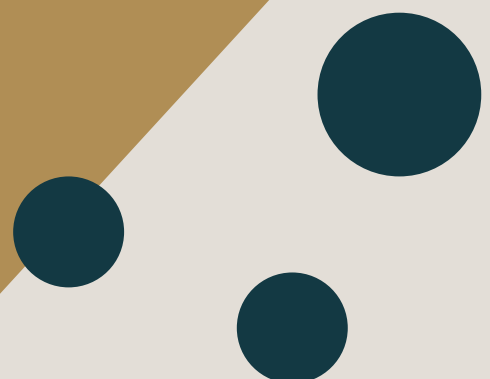
Undersøgende matematikundervisning er bredt anerkendt som en god måde at understøtte udvikling af elevernes matematiske kompetencer, deres aktive deltagelse og deres samarbejde.

Undersøgende matematikundervisning er egentlig ikke nyt. Det har været diskuteret, og afprøvet gennem de sidste 100 år. Det undersøgende har været benævnt forskelligt gennem tiden fx induktive arbejdsprocesser, problemløsning, åbne opgaver, og projektarbejde. Det kan derfor undre, at man det ikke har slået bedre igennem i den daglige undervisning i Danmark.

Vores samtaler med matematiklærere peger på en bekymring for om "det virker" samt en udpræget unuanceret tilgang til, hvad undersøgende matematikundervisning kan være.

- Det ikke at have 100 % kontrol, man kender ikke retningen, og der er en potentiel risiko for at man når til noget matematik, der ikke altid er fantastisk.
- Det kræver meget stor forberedelse, det er ikke nok at sige: "Gå ud på boldbanen og find matematikken"
- Jeg oplever dog at de svage elever også finder undersøgende matematikundervisnings svært, og faktisk er der også nogle af de stærke elever, der står af ...nu bliver det for kreativt!

Vi satte os derfor for at nedbryde undersøgende matematikundervisning til mindre, mere operationelle enheder, så det gav mulighed for større overblik for læreren og dermed større gennemslagskraft i den daglige undervisning.





## Mål eller middel?

Det kan være **et mål** for matematikundervisningen, at elever udvikler undersøgende matematiske kompetencer, såsom problemløsning, modellering og matematisering.

Men undersøgende matematikundervisning kan også være **et middel**, der relaterer til et læringssyn, som vægter elevernes deltagelse og ejerskab mod en større grad af forståelse af de matematiske begreber.



## Undersøgende aktivitet eller undersøgende undervisning?

En undersøgende **aktivitet** er en planlagt problemstilling, der indeholder en åbenhed og ukendthed, og som indebærer et behov for, at eleverne gennemfører en undersøgende virksomhed af en art for at finde et svar.

Undersøgende **undervisning** er den didaktiske ramme, der forholder sig til de muligheder, normer og rammer, der findes i den danske skole i dag. Hvor det første fokuserer på elevens arbejdsituation, fokuserer den anden del på lærerens overvejelser og valg.



## Eksplorativ eller investigerende?

En undersøgende virksomhed kan både være eksplorativ og investigerende. Ordene er hentet fra engelsk "exploration" og "investigation".

Det eksplorative består i at være udforskende, nysgerrig og observerende, uden en indledende problemstilling undersøger et begreb, et fænomen eller en genstand.

Det investigerende består i at vælge nogle hensigtsmæssige metoder for at finde et kvalificeret svar på en i forvejen fastlagt problemstilling. I det investigerende er der således en tydelig retning på det undersøgende arbejde.

## Undersøgende aktiviteter/opgaver

Projektets materiale tager udgangspunkt i fem forskellige undersøgende opgaver/aktivitetstyper. De udvalgte opgavetyper indeholder alle en grad af åbenhed og ukendthed. Der **skal** således være en ikke-rutinepræget egenskab - en uforudsigelighed for at det kan kaldes en undersøgende opgave/aktivitetstype. Der skelnes mellem åbenhed/ukendthed i *problemstillingen*, *løsningsmetoden* og i *resultatet*.

De enkelte opgavetyper har forskelligt undersøgende sigte. I nogle opgavetyper er det undersøgende et middel til bedre fordybelseslæring, og i andre er det et mål i sig selv. Der er også forskel i, hvorvidt opgavens problemstilling, løsningsmetode og resultat er lukkede eller åbne.

Der indgår desuden forskelle i elev- og lærerperspektivet for åbenhed/ukendthed. Der er forskel på, om man som lærer skal guide elever mod en opdagelse af en bestemt begrebsmæssig sammenhæng fx at vinkelsummen i en trekant er 180 grader, som man må forvente læreren har et indgående kendskab til, og så om man med en høj ukendthedsfaktor sammen med eleverne fx skal undersøge, hvor meget tandpasta der er brugt en morgen i Danmark.





## Opdagelsen

Hovedhensigten med Opdagelsen er, at eleverne, gennem en guidet aktivitet, skaffer sig indsigt i og forståelse for udvalgte matematiske begreber. Det undersøgende består i, at eleverne ikke kender de faglige pointer, de skal finde frem til ved at eksperimentere og danne sig erfaringer. De skal således få øje på sammenhænge og systemer, som kan lede dem mod en generaliseret viden inden for det udvalgte matematiske stofområde.



## Grubleren

Hensigten med grubleren er, at eleverne udvikler deres problemløsnings- og ræsonnerende evner. Det centrale er ikke stoffet, men om eleverne kan, og vil anvende ræsonnementer og systematisk undersøgelse. Fokus er således på elevernes undersøgende metodik.



## Produktet

Hensigten med produkte er, at eleven fremstiller et produkt, som "virker" – ud fra både funktionelle og æstetiske perspektiver. Det undersøgende består i, at eleverne tager ejerskab, og går længere end til blot at følge en angivet fremstillingsproces. De begynder at eksperimentere og forandre såvel proces som produkt. Her kan indgå skabende innovative designprocesser og elevens nysgerrighed som det bærende element, hvilket giver en mere eksplorativ tilgang til det undersøgende.



## Målingen

Hensigten med Målingen er at anvende matematik i en naturvidenskabelig ramme ved at foretage "en undersøgelse". Man er således underlagt nogle "videnskabelige krav og retningslinjer" for at gøre undersøgelsens resultat tilstrækkelig pålidelig og gyldig. Det undersøgende består i, at resultatet er ukendt for både lærer og elever. Det er således en måde at skabe sig ny viden på.

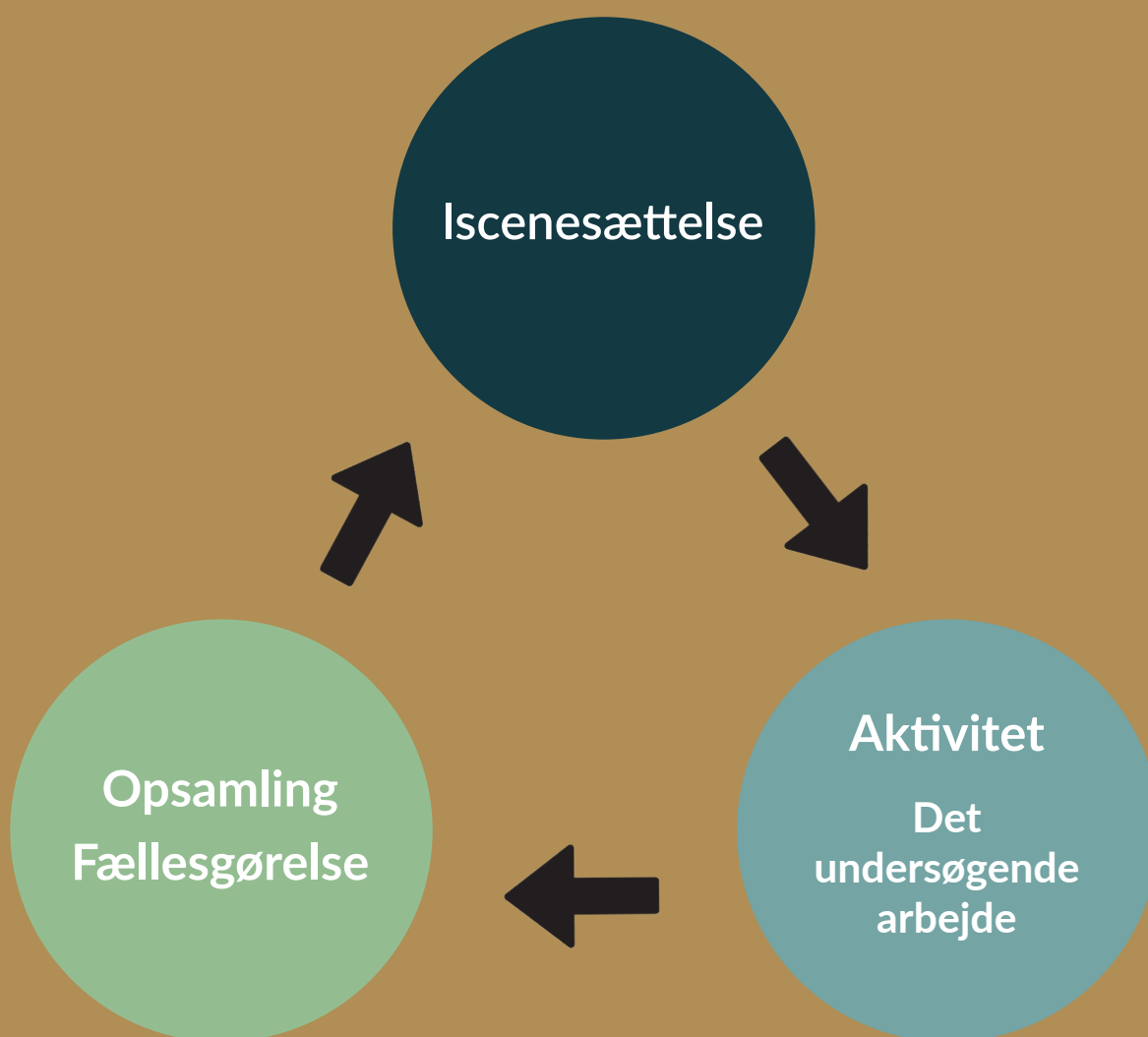


## Modelleringen

Hensigten med Modelleringen er at fremme modelleringskompetencen. Eleverne skal forholde sig til en problemstilling i hverdagen, som skal afgrænses og omsættes til en matematisk beskrivelse og analyse. På baggrund af det skal eleverne tolke de svar, de får og forholde sig kritisk til deres model. Her er der mange åbne ukendte elementer for såvel lærere som elever. Der indgår bl.a. en åbenhed i, hvilke variable og størrelser, som er relevante for at skabe en anvendelig matematisk model til beskrivelse og analyse af problemet. Der er en åbenhed i mulige resultater, som afhænger af de præmisser, man har opstillet m.m.

## Hvad menes der med undersøgende?

De fremstillede oplæg til undervisning er beskrevet i en tredelt struktur med hver deres didaktiske fokuspunkter. Modellen beskriver lærerens metodiske og organisatoriske valg ved planlægning og gennemførelse af en undersøgende undervisning.





## Iscenesættelse

Læreren introducerer problemstillingen, og tydeliggør den undersøgende aktivitet med henblik på at igangsætte elevernes arbejde. Læreren vælger sceniske virkemidler, som kan motivere elevernes accept og forståelse for opgaven/problemstillingen, indledende illustrative øvelser, dialogisk inddragelse af eleverne med mere. Den efterfølgende elevaktivitet bliver rammesat herunder elevernes samarbejde, ansvar og frihedsgrader.

## Aktivitet

Det undersøgende arbejde

Eleverne har frihedsgrader til at arbejde undersøgende og eksperimenterende med den iscenesatte problemstilling. Det kan indebære en vis uforudsigelighed og usikkerhed, som kræver fagligt vovemod hos eleverne (og læreren). Man skal turde agere med risiko for at fejle. Man skal kunne samarbejde og diskutere sig frem til mulige løsninger. Man skal acceptere, at problemstillinger i matematik ikke altid har et "rigtigt" svar.

## Opsamling Fællesgørelse

Læreren styrer en sammenfatning af elevernes erfaringer, resultater og refleksioner som grundlag for opbygning af fælles faglig viden i klassen. Læreren er facilitator i processen for at sikre en rettedhed mod at systematisere de opnåede resultater, udpege og formulere faglige pointer, etablere forbindelser mellem disse og tidligere etableret viden, samt udvikle et fælles fagsprog og eventuelt udpege nye spørgsmål og undersøgelser.

# Hvordan fungerede tredelingen?

## Lærerens iscenesættelse

Iscenesættelserne adskiller sig fra en sædvanlig indledning af en undervisningssekvens, ved i højere grad at have fokus på at kommunikere den problematik, der skal undersøges og i mindre grad på at forklare begreber og øvelser. En vellykket iscenesættelse er afgørende for elevaktivitetens funktionalitet, og stiller derfor krav til lærernes evne til, at rammesætte den undersøgende aktivitet samt tydeliggøre og motivere eleverne ved brug af sceniske virkemidler som den gode historie og inddragelse af artefakter.

”

*Opgaverne med burhøns og afrikansk skole var rigtige spændende for eleverne og det skyldtes i høj grad at iscenesættelsen var god.*

*Iscenesættelsen har stor betydning. En af lærerne kom til at forvirre eleverne med sin iscenesættelse i stedet for at guide eleverne, det betød at den efterfølgende aktivitet ikke gik som forventet.*

”

”

*Det er lidt svært, da det er nyt, at man som lærer også skal være skuespiller - men det virker!*

# Hvordan fungerede tredelingen?

## Klassens opsamling og fællesgørelse

Fællesgørelsen opleves som vigtig, men svær at gennemføre. På den ene side giver det eleverne mulighed for at tale om den matematik, de har arbejdet med, mens det på den anden side kan være vanskeligt at sikre, at de faglige pointer træder tydeligt nok frem og forstås. Fællesgørelsen er vigtig, fordi det er her, det sikres, at elevernes oplevelser opsummeres og generaliseres i fællesskab, så eleverne lærer matematik og hensigtsmæssige matematiske arbejdsmåder.

Der er gjort forsøg med at strukturere opsamlingen som "åben strategideling" eller "pointe-styret deling". Den første sigter på, at man vidensdeler på alle de forskellige løsningsforslag og løsningsmetoder som eleverne er nået frem til. Den anden måde er en fokuserings-strategi. Læreren udvælger centrale faglige og metodiske pointer på baggrund af elevernes arbejde.

Mange lærere taler om problemer med at finde tiden og tidspunktet til denne del.

Det opfattes vanskeligt for flere lærere at gennemføre en ræsonnerende dialog med eleverne. Der er øget motivation, men også mulig faglig distraktion ved inddragelse af medier.

*Dels har eleverne "talt" meget mere matematik og har skulle være forklarende.*

”

”

*Fællesgørelsen/opsamlingen har det ofte svært. Den ligger ofte i slutningen af lektionen, hvor eleverne mentalt er på vej til pause. Tiden bliver måske lidt presset.*

## Elevernes aktivitet

*"Der bliver ikke stillet spørgsmål (mere) ved, at der kan være flere løsninger. Vi har også oplevet, at elever siger "Det kommer an på..."*

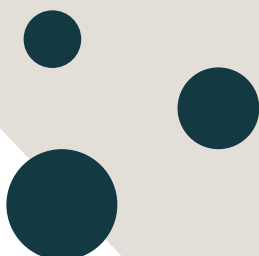
”

”

*"Man skal også være særlig opmærksom i forhold til at få givet hint tids nok. En af vores fik dem for sent - og så er frustrationerne blevet for store."*

*"Mange elever har svært ved at finde ud af, at man ikke skal lege, når man arbejder i skolegården. Man er kun en lærer til 25 elever på et meget stort område."*

”



Mange elever er glade for den undersøgende tilgang, der opleves som en motiverende variation af dagligdagen. Det øger elevernes samarbejdsevne, selvstændighed og dialogiske færdigheder. Der registreres en øget viljestyrke i at turde undersøge og eksperimentere sig til løsninger på matematiske problemstillinger. Der er dog også udfordrende elementer:

- Den øgede deltagerstyring forudsætter en elevadfærd, som kan være uvant og vanskelig for nogle.
- Niveauforskelle og manglende samarbejdsevner internt i grupperne kan være en udfordring.
- Mange elever har en mere traditionel opfattelse af faget matematik, som kan konflikte med undersøgende undervisning.
- Der er et øget behov for understøttende stilladserende tiltag, som løbende via hints kan løfte og støtte gruppearbejdet.

Elevrollerne kan ændre sig, så elever, som opfattes lavt præsterende, viser vilje og interesse, der fører dem længere end forventet. Modsat kan elever, som opfattes højt præsterende være mere modstræbende i deres arbejdsproces.

Den sædvanlige lærerrolle har været under pres. Den vidende og formidlende lærer skulle afløses af en mere faciliterende lærer, hvilket har været opfattet frustrerende. Opgaver, som er åbne på flere elementer for eleverne, og har høj grad af ukendthed for læreren, øger uforudsigeligheden, men øger også et mere ligeværdigt elev-lærerfællesskab for sammen at undersøge sig frem til en acceptabel løsning.

Nogle lærere opfatter det frustrerende og bekymrende, at man når "færre opgaver", end ved traditionel undervisning. Hovedsynspunktet er dog, at øget fordybelse i den enkelte opgave bedre understøtter forståelsen og lysten til læring.

## Effekt?

Vi har målt udviklingen i 4.-5. klasse elevers matematiske begrebsforståelse og deres matematiske problemløsnings-, modellerings-, og ræsonnementskompetencer.

Den undersøgende tilgang har haft en signifikant positiv indflydelse på elevernes matematiske begrebsforståelse. Tilgangen understøtter desuden elevernes arbejde med problemløsning, modellering og ræsonnement, men her har vi med de målemetoder vi har anvendt ikke kunne dokumentere, at indsatsen har haft en signifikant positiv effekt.



# Eksempel 1: Burhøns og plads

## Iscenesættelse

Der tages udgangspunkt i fortællinger om burhøns, og der samtales om spørgsmål som: "Hvor meget plads tror I, at en burhøne har? Hvordan kan det beskrives?"



---

## Aktivitet

Eleverne arbejder i grupper, hvor de undersøger, hvor mange burhøns, der efter reglerne kan/må være på en kvadratmeter. Undersøgelsen foretages ved hjælp af A4-ark, postkort samt en kvadratmeter i plast.

Eleverne diskuterer, og vælger en strategi for undersøgelsen. De skal efterfølgende dokumentere deres resultat med et foto.

*Må man klippe i arkene?*

”

*Må man regne det ud med en lommeregner?*

”

---

## Opsamling og fællesgørelse

Der samtales om elevernes metoder og resultater til at kunne besvare spørgsmålet: *Hvor mange burhøns kan der være på en kvadratmeter?*

*Hvordan kan I være sikre på, der ikke kunne være én mere, hvis I havde en rest?*

”

*Hvilken strategi brugte I for at få udfyldt kvadratmeteren?*

”

# Eksempel 2: Hvor mange knuder?

## Iscenesættelse

Der tages udgangspunkt i en fællesaktivitet, hvor eleverne skal gætte, hvor mange knuder de hver især kan binde på et minut på en snor på 50 cm. Aktiviteten igangsættes med at eleverne gætter antallet og noterer svaret på en post-it. Der fremstilles så mange post-it at hver gruppe kan få et svar fra alle elever i klassen.



Der stilles nu spørgsmålet: "Hvis der kommer en mand ind gennem døren og spørger - hvor mange knuder kan en elev i denne klasse binde på 1 minut - hvad kan I så fortælle ham?"

---

## Aktivitet

Der er flere måder, eleverne kan ordne deres datasæt på.

Nogle elever laver søjler af post-it-sedler. Andre sætter alle sedlerne i nummerorden, men i forlængelse af hinanden uden søjler.

Grupperne arbejder her med uformelle beskrivelser af median, mindsteværdi, størsteværdi og typetal.

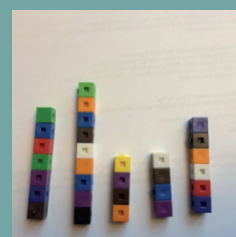
---

## Opsamling og fællesgørelse

Alle grupper fremlægger deres svar ud fra en selv-produceret video. Et eksempel på en film [kan ses her >>](#)

Sammenlign evt. med en anden classes knudetal? Hvilken klasse er bedst? *Hvordan kan man overhovedet sammenligne to klasser?*

"Antal knuder" bygges i centicube-tårne og centicubestårnene i gruppen omfordes derefter, så tårnene er lige høje. Man kan berøre situationen "Hvad ville der ske med højden på jeres tårne, hvis der kom 4 nye elever ind i gruppen, som kun kunne binde én/56 knude(r)".





## Et par anbefalinger

- Brug den undersøgende undervisning til at øge det faglige samarbejde, den faglige selvstændighed og den faglige samtale.
- Brug den undersøgende undervisning til at øge dybden af elevernes forståelsesniveau inden for fagets begreber og metoder.
- Brug den undersøgende undervisning til at opleve nye potentialer og roller hos eleverne.
- Prioriter iscenesættelse og især opsamling. Elevernes frie undersøgelse vil ikke føre til matematiklæring uden støtte og sprogliggørelse.



Undervisningsforløbene er udviklet på baggrund af det landsdækkende storskalaprojekt KiDM – Kvalitet i Dansk og Matematik – igangsat af Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling i samarbejde med Skolelederforeningen og Danmarks Lærerforening.

Projektet er gennemført i 2016-2019 af et konsortium bestående af UCL Erhvervsakademi og Professionshøjskole, Aalborg Universitet, Syddansk Universitet, Professionshøjskolen Absalon, UC SYD og Professionshøjskolen UCN.

Du finder undervisningsforløbene på [kidm.dk](http://kidm.dk). Dansk-delen kræver et login, som du kan rekvirere ved at skrive til [post@laeremiddel.dk](mailto:post@laeremiddel.dk) og oplyse navn og skole. Matematikdelen er frit tilgængelig for lærere og kræver ikke et login.

I denne folder kan du læse om undersøgende matematikundervisning, der er en måde at undervise i matematik på, der har fokus på at støtte eleverne i at udforske, systematisere og argumentere i matematiske situationer.

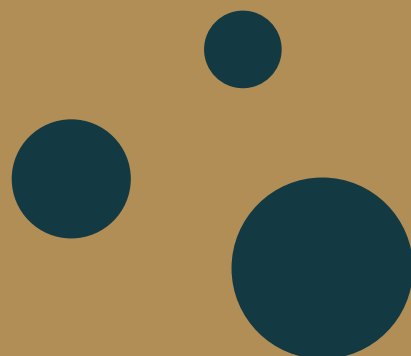
Tilgangen er udviklet på baggrund af internationale erfaringer og afprøvet i en masse danske 4. og 5. klasser med gode resultater. I folderen kan du se, hvordan du får adgang til nye undervisningsforløb, hvor eleverne undersøger matematiske situationer.

Du finder undervisningsforløbene på [kidm.dk](http://kidm.dk).

Dansk delen kræver et login, som du kan rekvirere ved at skrive til [post@laeremiddel.dk](mailto:post@laeremiddel.dk) og oplyse navn og skole. Matematikdelen er frit tilgængelig for lærere og kræver ikke et login.



BØRNE- OG  
UNDERVISNINGSMINISTERIET



KiDM.dk