

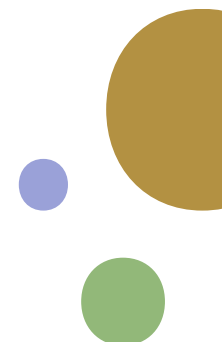
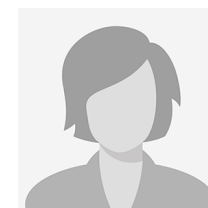
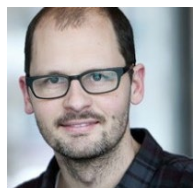
Om undersøgende matematikundervisning



Ved lektor Bent Lindhardt Professionshøjskolen Absalon

KIDM forskere – udviklere og praktikere

UCN
UCSyd
UCL
Absalon
Aalborg uni
Syddanske Uni
Folkeskoler



Hvad er KiDM?

Et landsdækkende storskalaprojekt med fokus på undersøgelsesorienteret didaktik

Projektet havde til hensigt at skabe bedre kvalitet i fagene dansk og matematik.

Projektet blev gennemført med særligt fokus på 4.-5. klasse i matematik og 7.- 8. klasse i litteraturundervisningen i dansk.

- Udvikling af metoder og værktøjer til at styrke undervisningens kvalitet
- Udvikling af lokal kapacitetsopbygning.

Bedre kvalitet i dansk og matematik (KIDM)

Var der en ubalance?

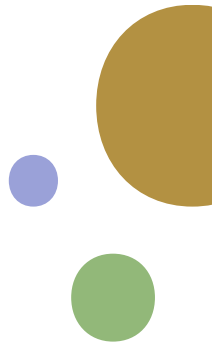


Trænings- og
formidlingsorienterede

Det undersøgende –
dialogiske og
anvendelsesorienterede

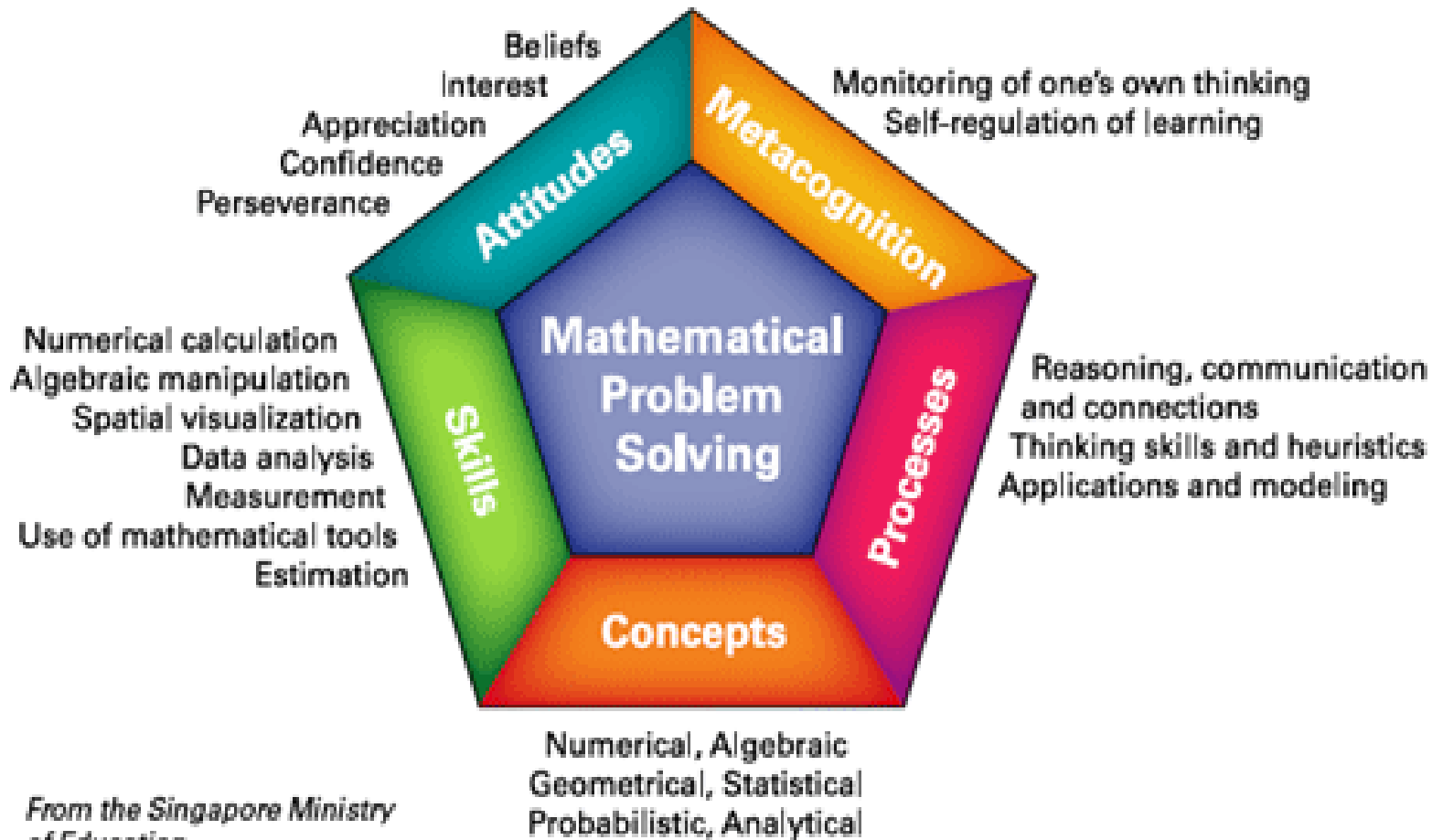
Undersøgende matematik – et politisk fokus

Generelt har den undersøgende tilgang fået stor medvind i flere lande efter, at Europakommissionen i 2007 blåstemplede Inquiry-tilgangen i naturfag og matematik, hvor de anbefalede at nytænke (*den traditionelle*) undervisning og basere den på en mere undersøgelsesorienteret tilgang. Der blev herefter finansieret flere projekter også i Danmark bl.a. PRIMAS som fokuserede på udvikling af inquiry-based ressourcer og -materialer og lærerudvikling (Michelsen, 2011)



<https://www.primas.mathshell.org/pd.htm>

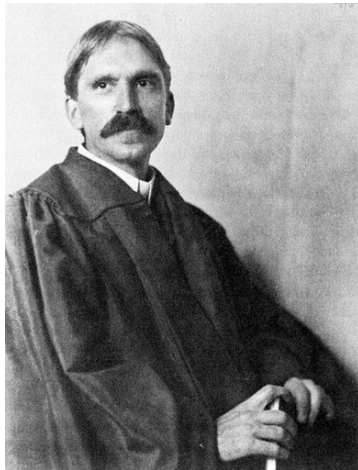
<https://primas-project.eu/modules/modules-norsk/>



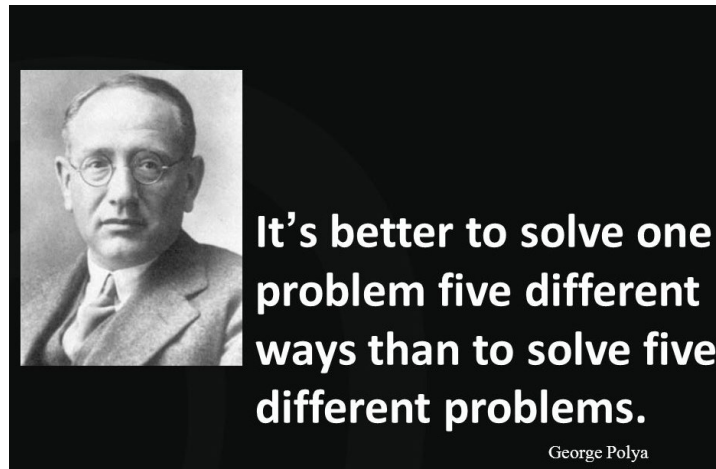
From the Singapore Ministry of Education

NY fagdidaktik?

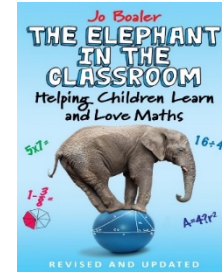
- Den undersøgende arbejds måde har stærke rødder i Deweys learning by doing (1920'erne) og Polyas tanker om problemløsning beskrevet i "How to solve it" (1945)



John Dewey 1902



Opfattelsen af matematik



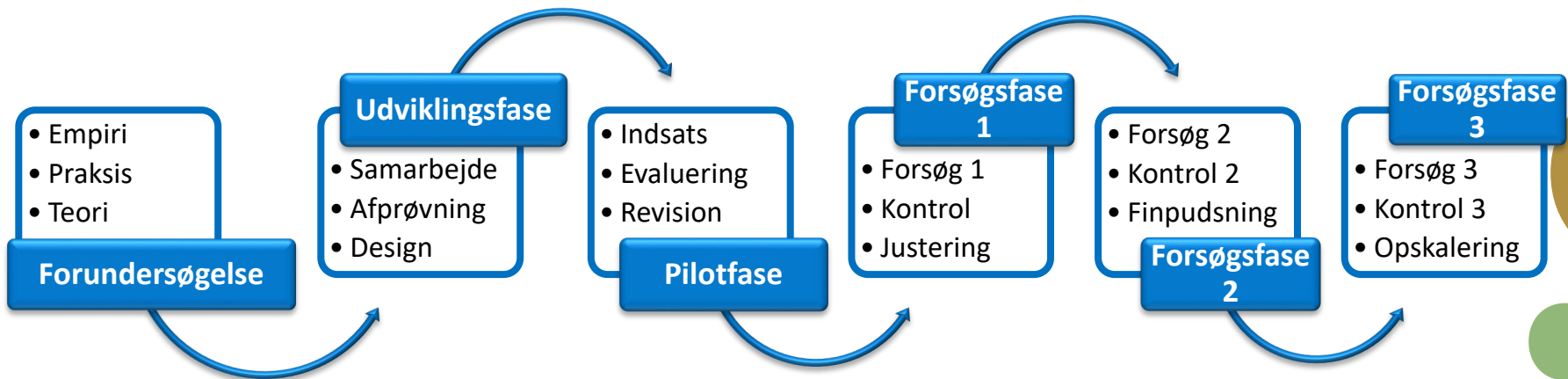
- Det er ikke algoritmer og beregninger (vores klasseværelseserfaring), det er bare **et** aspekt af matematik, i sin rene form handler det om anerkendelse af mønstre i naturen og indfangning af disse mønstre så præcist som muligt.
- Klasser, der arbejder som teams, der laver aktiviteter for at udforske nøgleidéer, er meget mere effektive end træning

- It isn't algorithms and calculations (our classroom experience), that's just one aspect of mathematics, in its pure form it's about the recognition of patterns in nature and the capturing of those patterns as precisely as possible.
- Classes working as teams doing activities to explore key ideas is much more effective than rote responses to exercises in the textbook.

<https://www.youtube.com/watch?v=3icoSeGqQtY>

Matematikindsatsens tre teser

- En undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning (UDA) med rum til **elevdeltagelse** øger effekten af elevens **forståelse for matematiske begreber** og udvikler **hensigtsmæssige arbejds måder**.
- Undervisning hvor eleverne oplever indholdet **meningsfuldt** både med udgangspunkt i faget selv og i fagets anvendelse øger **motivationen**
- En undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at **implementere de matematiske kompetencer**.



Type	Antal skoler og antal klasser matematik
Udviklingsskoler	6, 10 klasser
Pilotskoler	14, 53 klasser
Forsøgsskoler	45, 143 klasser
Kontrolskoler	42, 131 klasser

En projektperiode på 3 – 4 mdr.

Forløb 1

- Tal og algebra/ problembehandling og ræsonnementskomp.
- *Fagudvalg*: Fokus på iscenesættelsen

Forløb 2

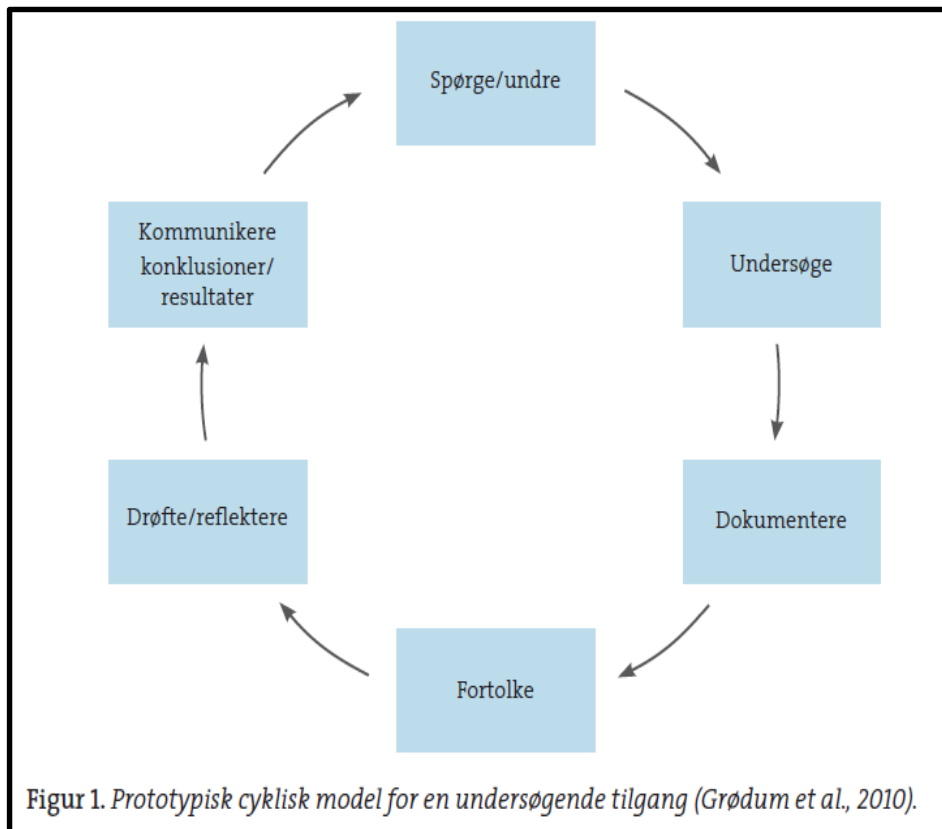
- Geometri og måling /problembehandling og ræsonnementskomp.
- *Fagudvalg*: Fokus på elevens undersøgende arbejdsform og lærerrollen

Forløb 3

- Statistik og sandsynlighed / modellering
- *Fagudvalg*: Fokus på opsamling og evaluering

Didaktiske modeller for elevens undersøgende virksomhed

Aktivitet
Undersøgende
arbejde



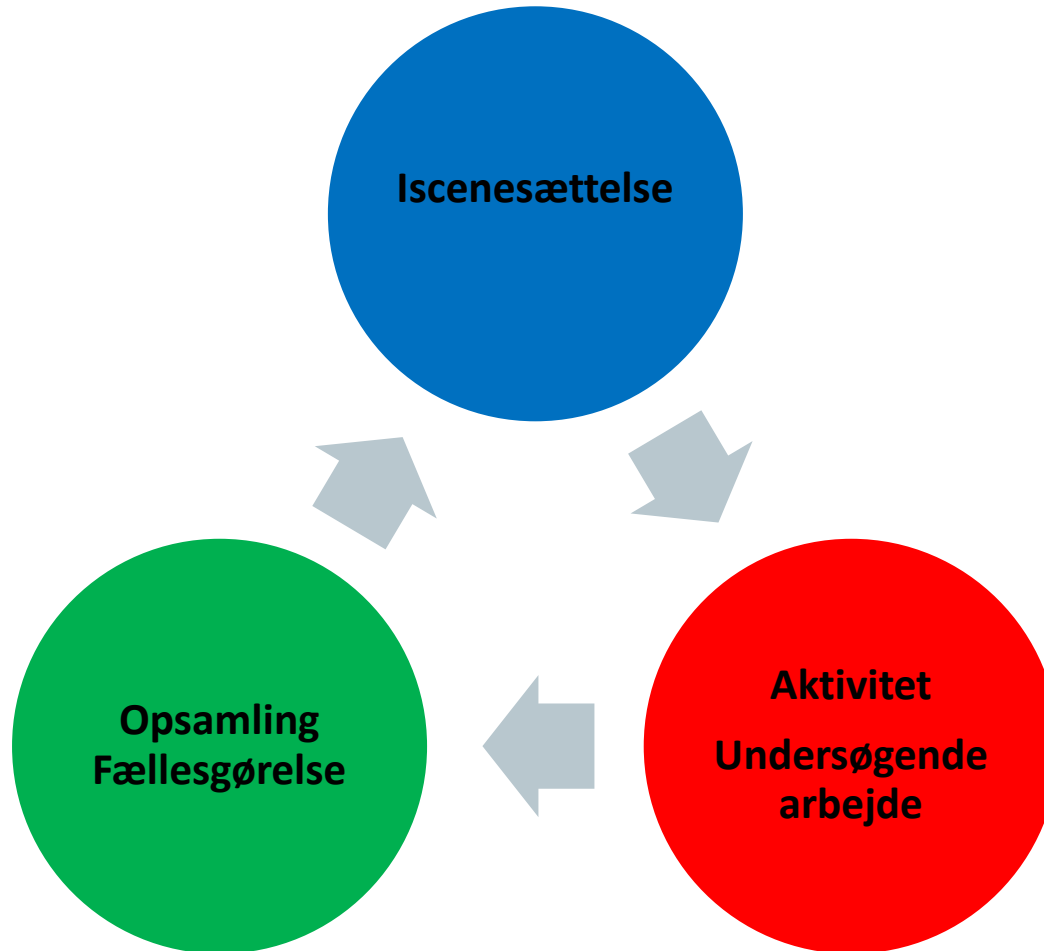
Polya's 4 Steps to Problem Solving

1. Understand the problem
2. Devise a plan to solve the problem
3. Carry out and monitor your plan
4. Look back at your work and check your results

- Understand the problem
- Make a plan
- Act out the plan
- Reflect on the outcomes
- Adapt the plan or make a new one
- Act out the new plan
- What is missing

Ann Watson, Oxford

Hvordan kan en undersøgende undervisning struktureres?



Koordinatorudsagn



Koordinatorerne har været ansvarlige for at skriftliggøre egne og læreres udsagn. Udsagn fra bl. a. faggruppemøder og uformelle møder danner således grundlaget for de kvalitative data vi har analyseret.

Koordinatorerne har modtaget særlige opsamlingsark med spørgsmål knyttet til evaluering af projektet. De har ikke været opfattet mere bindende, end man har brudt rammerne og beskrevet det, man syntes var væsentligt.

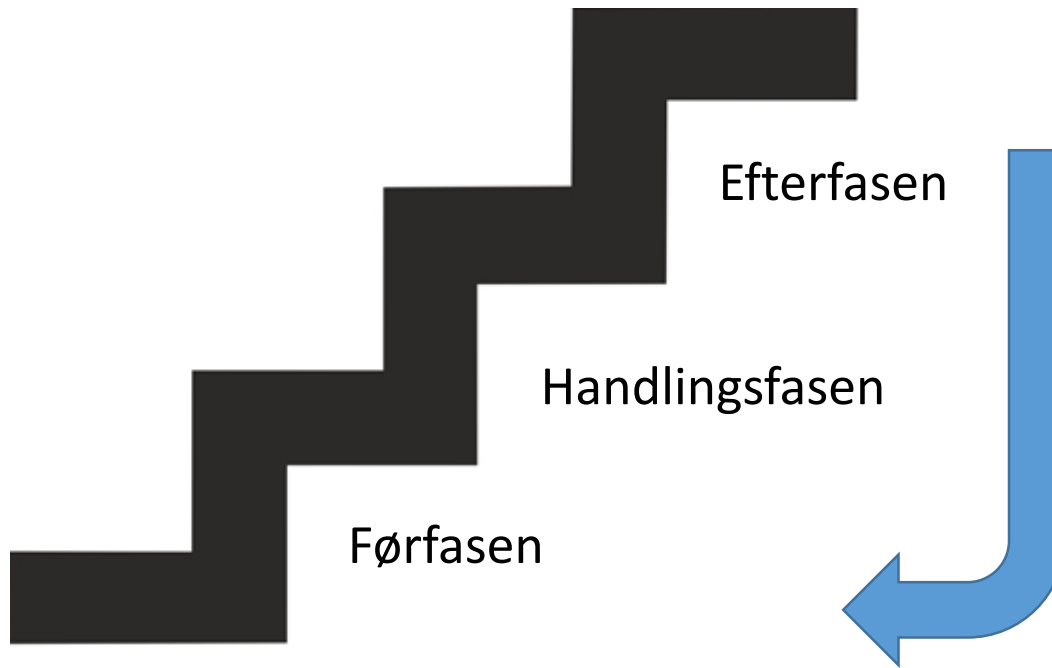
	Pilot	Runde 1	Runde 2	Runde 3
Forsøgsskoler/klasser	14/56	14/43	14/43	17/54
Deltagelse ved kickoffmøde	100 %	100 %	100 %	100 %
Afleveret opsamlingsark indsats (1)	85,7 %	85,7 %	78,5 %	94,1%
Afleveret opsamlingsark indsats (2)	85,7 %	60,5 %	Ca. 70%	58,8 %
Afleveret opsamlingsark indsats (3)	35,7 %	35,7 %	71,4 %	41,1 %

Isenesættelse

1. Det opfattes anderledes for mange lærere at igangsættelse er en isenesættelse af problemstillinger og ikke forklaringer.
2. Synes at være et godt tema til fælles faglig planlægning
3. Man opfatter den som central for succesen for elevernes accept og virkelyst. Der skal ikke siges så meget "forkert" før det efterfølgende elevarbejde går galt
4. Den gode historie eller ting medbragt påkalder sig en særlig opmærksomhed fra elevernes side.
5. **Gode** spørgsmål åbner for elevinvolvering
6. Der skal være klarhed i den didaktiske kontrakt
7. Der er opstået et motivationsfokus - sjovt - spændende osv

Elevens undersøgende arbejdsmåde

Aktivitet
Undersøgende
arbejde



OPDAGELSEN



FØRFASEN

- Hvad ved I om emnet, I skal undersøge?
- Hvad tror I, I finder ud af?
- Hvordan vil I beskrive det, I skal, med egne ord?
- Er der noget, som undrer jer?
- Har I lavet noget lignende før?

HANDLINGSFASEN


- Har I en plan for, hvad I gør?
- Kan man tegne opgaven?
- Hvordan vil I gætte og prøve efter?
- Har I et system i jeres måde at løse opgaven på fx ved brug af tabeller og lister?
- Kan I lave en "hvis ... så" sætning?
- Kan man lave den samme opgave med enklere tal eller figurer?
- Kan man bruge hjælpemidler til at løse opgaven?
- Kan man bruge konkrete materialer til hjælp?

EFTERFASEN

- Hvad har I fundet ud af?
- Svarer resultatet til jeres forventninger?
- Er det et rimeligt resultat?
- Har I opdaget et system eller et mønster?
- Hvordan forklarer I, hvad I har fundet ud af?
- Hvordan kan I bedst vise jeres resultat?
- Hvad har I lært om emnet?

Mulige fokuserede arbejds måder for eleven

1. Gæt og prøv
2. Brug modeller til overblik
3. Brug hjælpemidler
4. Tegn/skitser det
5. Se efter et mønster
6. Gør opgaven enklere
7. Arbejd "baglæns"
8. Arbejd systematisk




Aktivitet
Undersøgende
arbejde

Aktivitet

Aktivitet
Undersøgende
arbejde

1. Eleverne er blevet mere samarbejdende, samtalende (også lærerne) – og selvstændige.
2. Der oplevedes en øget motivation hos eleverne (sjovt) men også frustration idet øgede frihedsgrader var uvant
3. Det tog tid og trak ”tempoet” ud af undervisningen. Man ”nåede mindre” men fordybelsen støttede forståelse.
4. Elevernes lyst til at bidrage til undervisningen blev øget herunder øget aktivitet ved konkrete tilgange.
5. Eleverne var ikke lige så facitorienterede
6. De lavtpræsterende elever oplevedes mere deltagende end forventet.
7. Der er brug for en ”hints”-strategi for læreren.
8. Savn af bogen og træningsopgaver - mathed i 3. indsats (nu er det nok)

Opsamling/fællesgørelse



Opsamling
Fællesgørelse

1. Gennemførelse af en afsluttende sekvens af et undervisningsforløb, hvor der samles op på elevernes undersøgende arbejde, oplevedes mere kompliceret end iscenesættelsen, dog stor enighed om, at det er centralt og væsentligt for læringseffekten.
2. Mange lærere taler fx om problemer med at afpasse tiden og tidspunktet til denne del.
3. Dilemma om grad af lærerintervention i fx elevernes anvendelse af fagsprog i "fremlæggelse" og også vanskeligheder med gennemføre en medinddragende dialogisk opsamling
4. Der mangler viden og erfaringer. Der er gjort forsøg med at strukturere opsamlingen som "åben strategideling eller "pointestyret deling".

Hvad vil det sige at undersøge?

Det eksplorative (Exploration)

- Det eksplorative består i at være en nysgerrig og observerende person, som uden fast og styrende problemstilling undersøger et begreb, et fænomen eller en genstand. Man er således en opdagelsesrejsende ud i det ukendte, hvor man undervejs justerer mål og arbejdsproces.



Det investigerende (Investigation)

- Det investigerende består i at forfølge nogle hensigtsmæssige strategier for at finde et kvalificeret svar på en fastsat problemstilling. Problemstilling er ledetråden i arbejdsprocessen - en kurssætter som løbende skal sikre styringen mod et kvalificeret svar.



Om nuancerne i åbne opgaver

Der er mange forskellige typer af åbne opgaver.

1. Åbne opgaver kan have grader af åbenhed
 - Problemet kan være åbent
 - Løsningmetoderne kan være åbne
 - Svaret kan være åbent
2. Åbne opgaver kan have det undersøgende som mål eller middel.
3. Åbne opgaver kan være tidsmæssigt store opgaver og små opgaver

Der er forskel på undersøgende opgaver...

Opdagelsen



Grubleren



Produktet



Målingen



Modelleringen



Opdagelsen

- Hovedhensigten med opdagelsen er, at eleverne, gennem en guidet aktivitet, skaffer sig indsigt i og forståelse for udvalgte matematiske begreber. Det undersøgende består i, at eleverne ikke kender de faglige pointer, de skal finde frem til ved at eksperimentere og danne sig erfaringer. De skal således få øje på sammenhænge og systemer, som kan lede dem mod en generaliseret viden inden for det udvalgte matematiske stofområde.



Opdagelsen handler om at indse faglige pointer

De faglige pointer kan både være af metodisk og begrebsmæssig karakter

$$54 * 5$$

Beregningen er
multiplikationen $50 * 5 + 4 * 5$

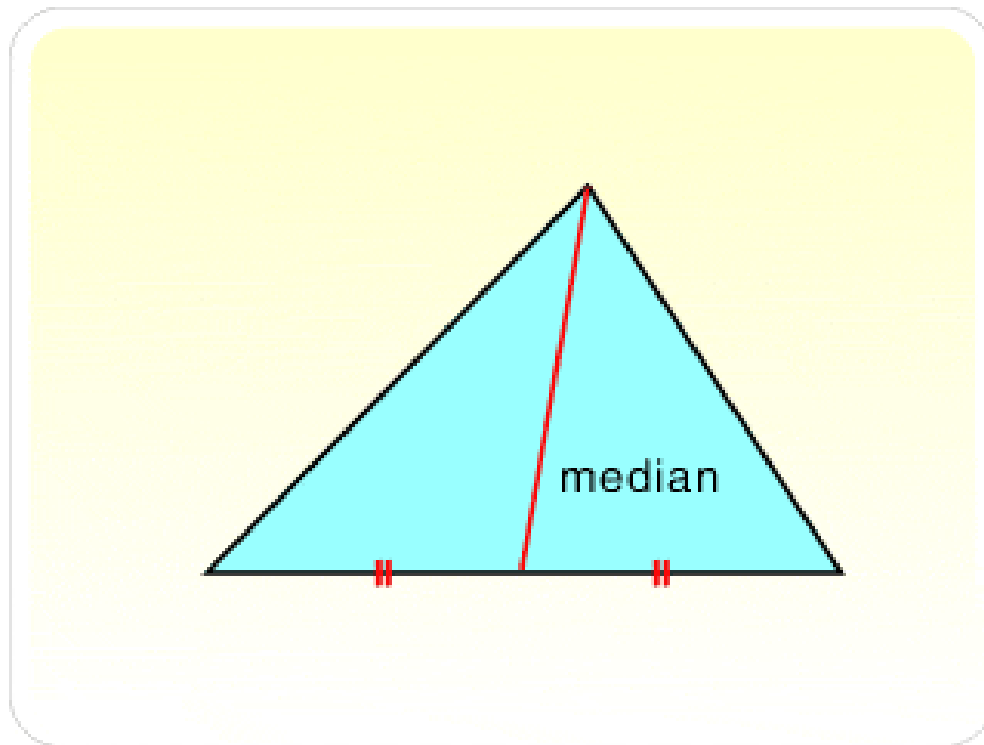


At finde $\frac{1}{4}$ af noget
afhænger af helheden.



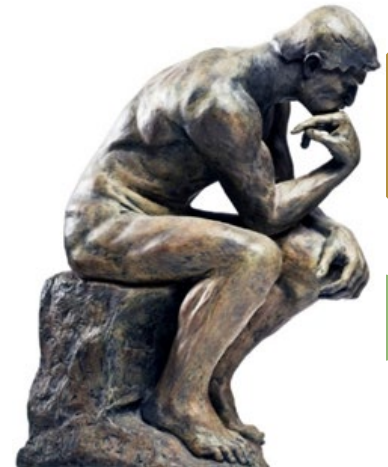
Geometriske figurer indgår i
både grupper og undergrupper

Kan det passe at medianen deler en trekant i to lige store dele?



Grubleren

- Hensigten med grubleren er, at eleverne udvikler deres problemløsningsevner og ræsonnerende evner. Det centrale er ikke stoffet, men om eleverne kan, og vil, anvende ræsonnementer og systematisk undersøgelse. Fokus er således på elevernes undersøgende metodik.
- Grubleren forekommer i **mange afskygninger** i matematik af både rent matematiske og mere virkelighedsorienterede opgaver.



Hvad vejer kasserne?

Emilie har fået fire kasser.

Kasserne er blevet vejet parvis i alle mulige kombinationer.

Det har givet vægtene 6, 8, 10, 12, 14 og 16 kg.

Emilie har ingen vægt, men vil finde ud af, hvad hver kasse vejer. Hjælp hende!



Clara og Sisse

6: 4 og 2, 5 og 1

8: 2 og 6, 1 og 7, 3 og 5

10: 1 og 9, 2 og 8, 3 og 7, 4 og 6

12: 1 og 11, 2 og 10, 3 og 9, 4 og 8, 5 og 7

14: 1 og 13, 2 og 12, 3 og 11, 4 og 10, 5 og 9, 6 og 8, 7 og

16: 1 og 15, 2 og 14, 3 og 13, 4 og 12, 5 og 11, 6 og 10, 7 og 9,

Håndtryk – et politisk hot emne



- Hvor mange håndtryk skal der til hvis alle i en gruppe skal have sagt goddag til hinanden?
- Fremstil en regel

Gennemfør faser hvor I:

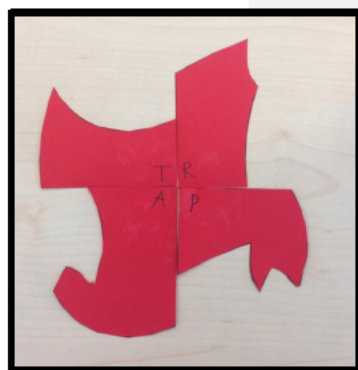
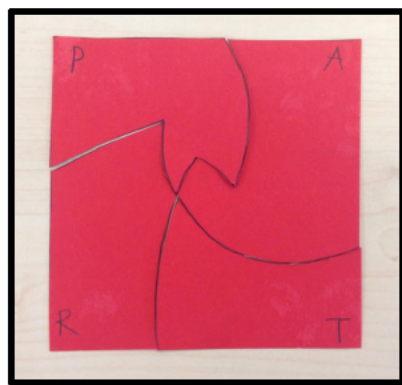
1. laver enkle eksempler
2. ser på fællestræk
3. systematiserer jeres iagttagelser

Produktet

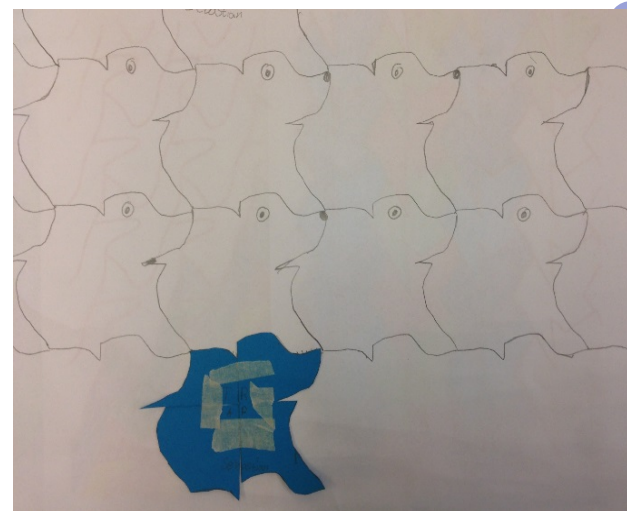
- Hensigten er her, at eleverne fremstiller et produkt, som "virker" – ud fra både funktionelle og æstetiske perspektiver. Det undersøgende består i, at eleverne tager ejerskab, og går længere end til blot at følge en angivet fremstillingsproces. De begynder at eksperimentere og forandre såvel proces som produkt. Her kan indgå skabende innovative designprocesser og elevernes nysgerrighed som det bærende element, hvilket giver en mere eksplorativ tilgang til det undersøgende.



Fremstil et flot dækkende mønster



Til slut skal I udvælge et par eksempler til at hænge op på værkstedsplanchen.



Byg en større vandbombe



<https://www.bing.com/videos/search?q=vandbombe&&view=detail&mid=0A5B72C14FA643826E5E0A5B72C14FA643826E5E&&FORM=VRDGAR&ru=%2Fvideos%2Fsearch%3Fq%3Dvandbombe%26FORM%3DHDRSC3>

Målingen



- Hensigten med Målingen er at anvende matematik i en naturvidenskabelig ramme ved at foretage "en undersøgelse" med anvendelse af måltal, beregning og statistik. Eleverne er således underlagt nogle "videnskabelige krav og retningslinjer" for at gøre undersøgelsens resultat tilstrækkelig pålidelig og gyldig.
- Der er klare tværfaglige kontakter til skolens naturfag hvor matematik indgår som redskabsfag.

En undersøgelse af ...



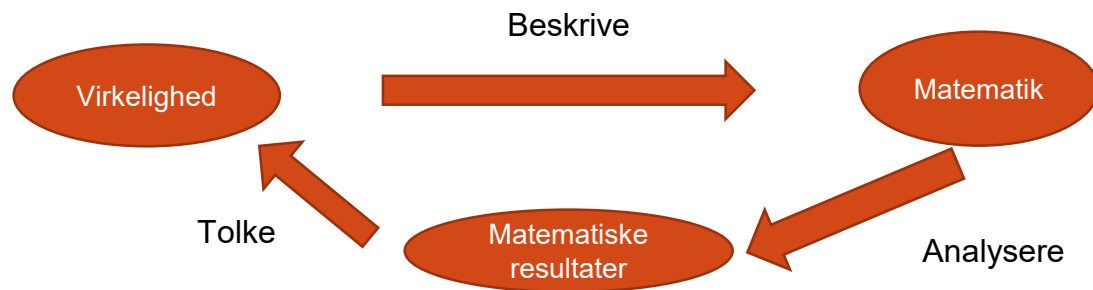
A

Undersøg hvor meget energi forskellige drikkevarer indeholder?

- Hvor kommer energien fra? Er det fra kulhydrater, fedt eller protein?
- Sammenlign sukkerindholdet.
- Fremlæg resultatet af undersøgelsen.

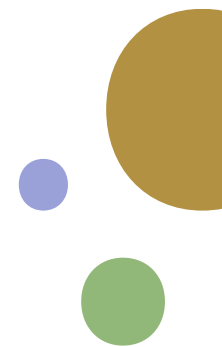
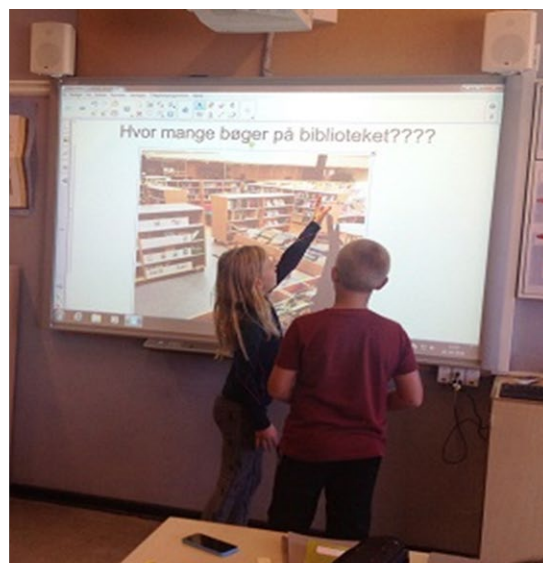


Matematisk modellering

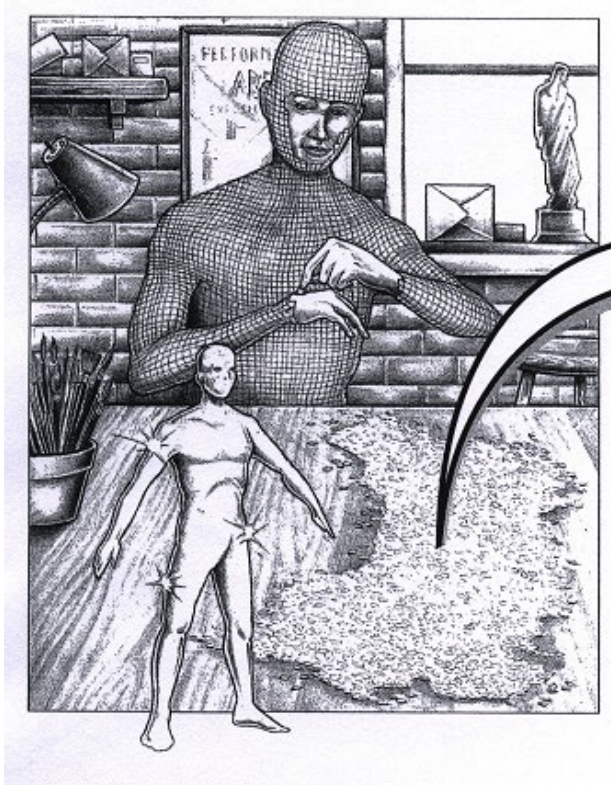


Hensigten med Modelleringen er at fremme modelleringskompetencen. Eleverne skal forholde sig til en problemstilling i hverdagen, som skal afgrænses og omsættes til en matematisk beskrivelse, analyse og tolkning. Centralt er valg af variable og størrelser, der er relevante for at skabe en anvendelig matematisk model. Der er en åbenhed i mulige resultater, som afhænger af de præmisser, eleverne har opstillet

Hvor mange bøger på biblioteket?



En model for menneskets overflade



Timm Ulrich

Tysk kunstner som forsøgte at dække sin krop med ”kvadratcentimetre”

Selbstporträt (Körper-Kunst-Objekt)

1970 – 1971

18360 cm²

En oversigt

Aktivitet	Sigte	Perspektiv	Problem	Metode	Resultat	Type
Opdagelsen	Afprøve og udlede begrebsmæssige sammenhænge	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Lukket	Åbent	Åbent	Investigerende
Grubleren	Udvikle problemløsningsevne	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Åbent	Åbent	Lukket	Investigerende
Produktet	Foretage eksperimenterende ændringer (opfinde)	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Lukket/ åbent	Lukket/ åbent	Lukket/ åbent	Eksplorativt
Målingen	Videnskabelig undersøgelse gennem måling og beregning	Lærer	Kendt	Kendt	Ukendt	
		Elever	Lukket	Lukket	Åbent	Investigerende
Modelleringen	Udvikle og afprøve matematiske modeller	Lærer	Kendt/ ukendt	Ukendt	Ukendt	
		Elever	Åbent	Åbent	Åbent	Investigerende

Kvantitative vurderinger

Overordnet kan vi konkludere, at vi kan identificere en lille positiv effekt på elevernes **begrebsforståelse**, men at vi ikke har kunnet identificere en gennemsnitlig positiv effekt af indsatsen på elevernes **undersøgelseskompetence**, idet resultatet af den undersøgelseskompetencetesten ikke er statistisk signifikant på 0,05-niveauet. Vi kan dermed ikke udelukke, at det må tilskrives tilfældighed, at der er denne forskel på de to grupper

Hjemmesiden kidm.dk/lærer



[OVERSIGT](#) | [FAGTEAMET](#) | [FAGDIDAKTIK](#) | [DE TRE INDSATSER](#)

Du er her: [Matematik - Lærer](#) / [Oversigt](#)

FAGTEAMET

- Fagteam og faglig udvikling
- Projektteam møde 1
- Faggruppemøde 1
- Projektteam møde 2
- Faggruppemøde 2
- Projektteam møde 3
- Faggruppemøde 3
- Projektteam møde 4

FAGDIDAKTIK

- Undersøgende matematikundervisning
- Elevens undersøgende arbejdsmåde
- Dialogisk undervisning
- Lærer/elevrolle
- Andet fra grundlagspapiret

DE TRE INDSATSER

- Indsats 1
- Indsats 2
- Indsats 3



Vil du vide mere?

Se projektets hjemmeside på EMU: <https://emu.dk/grundskole/forskning-og-viden/sproglig-forstaelse/kvalitet-i-dansk-og-matematik>

Se projektets folder for mere information her: <http://laeremiddel.dk/wp-content/uploads/2012/07/KiDM-folder-januar-2017.pdf>

Se omtalen af KiDM i *Folkeskolen* her: <https://www.folkeskolen.dk/595701/dlf-og-ministeriet-nyt-forsog-saetter-dannelse-og-aestetik-paa-dagordenen>

Se omtalen af KiDM i *Jyllands-Posten* her: <http://laeremiddel.dk/stor-omtale-af-kidm-i-jyllands-posten/>

Se matematikrelaterede artikler om KiDM i Folkeskolen:

<https://www.folkeskolen.dk/608525/burhoens-pusles-paa-plads-i-matematik>

<https://www.folkeskolen.dk/608526/matematik-er-mere-end-traeningsopgaver>

<https://www.folkeskolen.dk/644458/matematik-grubler-med-indbygget-frustration-eller-sjov>

Video fra undervisningssituation: <https://www.tvmidtvest.dk/video/undersogende-matematik-i-klinkby?autoplay=1#player>

Udgivelser

Dreyøe, J., Michelsen, C., Hjelmberg, M. D., Larsen, D. M., Lindhart, B. K., & Misfeldt, M. (2017). *Hvad vi ved om undersøgelsesorienteret undervisning i matematik: Forundersøgelse i projekt Kvalitet i Dansk og Matematik, delrapport 2*. København: Undervisningsministeriet.

Hansen, R. & Jensen, M., E.. (2019) Udgange på undersøgende matematik, *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (3)

Larsen, D. M., & Lindhardt, B. K. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (1). p. 7-21.

Larsen, D. M. (2017) Problemopstilling som vurdering for læring. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (2) (pp. 84-87)

Lindhardt, B (2019). KIDM – et storskala projekt om undersøgende matematik. *Matematikbladet* nr. 3 2019

Michelsen, C., Dreyøe, J., Hjelmberg, M. D., Larsen, D. M., Lindhart, B. K., & Misfeldt, M. (2017). *Forskningsbaseret viden om undersøgende matematikundervisning*. (1 ed.) København: Undervisningsministeriet.

Larsen, D.M., Dreyøe, J., & Michelsen, C. (2019) How argumentation in teaching and testing of an inquiry-based intervention is aligned. Manuscript submitted for publication in *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.